量子不変量

3次元トポロジーと数理物理の遭遇

[執筆]……………………大山淑之
高田敏恵
出口哲生
村上　順
村上　斉
和久井道久

[編著]……………………大槻知忠

日本評論社

まえがき

トポロジー(位相幾何学)は，空間の大域的な形や，空間内の図形の性質でとくに図形の連続変形で不変な性質を研究する，幾何学の分野である．なかでも3次元のトポロジーは，3次元空間(3次元多様体)の大域的構造や3次元空間内の図形である結び目を研究対象とし，トポロジーの発展の初期から現在にいたるまで着実に発展をつづけてきた．

高次元空間では，「結ばっているひも」はその空間内の変形ですべてほどけてしまうため，多様体の分類問題などトポロジーの問題にとりくむときにしばしば現れる「ひもが結ばっている」という現象がつねに解消され，事態が簡明になってしまうことが知られている．これに対して，3次元空間で結ばっているひも(結び目)は一般に連続的な変形でほどくことができず，この結び目という3次元の位相幾何学的現象が3次元のトポロジーを複雑に，そして，豊かにしている．3次元のトポロジーを解明するためには，この結び目という現象に正面からアプローチしなくてはならない．

結び目(や3次元多様体)をリストアップしていくと一見不規則にさまざまな結び目(や3次元多様体)が無数に現れる．これらを統一的に扱うのは容易ではなく，実際，3次元のトポロジーの当初の研究では個々の結び目や個々の3次元多様体の位相幾何学的な個性を調べる研究が中心であった．3次元のトポロジーの発展の転機になったのは1980年代以降の数理物理と3次元トポロジーの交流である．本書のタイトル「量子不変量」はこの交流におけるキーワードである．この交流による発展により，我々は，結び目全体の集合や3次元多様体全体の集合の構造をも視野にいれつつ，3次元トポロジーの研究ができるようになった．

本書の目的は，量子不変量に関連した3次元のトポロジーの(おもに)1980年代以降の発展におけるさまざまな話題について解説することである．読者は大学初年級の学生やこの分野の非専門家を念頭においている．『数学セミ

ナー』1998年1月号〜9月号に現代数学スナップショット「量子不変量をめぐって」が連載されたが，この連載の原稿を編者が編集・加筆することにより本書がつくられた．連載全9回は共著者の大山淑之(第3回)，高田敏恵(第6回)，出口哲生(第4回)，村上順(第5回)，村上斉(第2,8回)，和久井道久(第7回)，大槻知忠(第1,9回)により執筆された．連載第1〜9回がそれぞれ本書の第1〜9章におおむね対応する．複数の著者による連載を1冊の本にまとめたため，本書ではたとえばホモロジー群の導入方法などに部分的に一貫性がないところもある．その反面，各章が内容的にほぼ完結しているので，読者はもし部分的に内容がよく理解できない個所があったとしても，あまり気にせず章別に本書をよみすすめることができる．本書では，専門的な知識を仮定せずにこの分野の実質的な内容を直感的に読者に伝えることを目標にしたため，しばしば数学的な厳密さを欠く記述がされていることがある．この分野を専門的に勉強しようとする読者は，本書に加えて巻末の参考文献も参照していただきたい．本書をこの分野の入門書として，読者にこの分野に興味をもっていただければ大変幸いである．

最後に，連載の企画時から本書の出版にいたるまでお世話になりました日本評論社の佐藤大器氏に感謝いたします．

1999年7月　　　　編著者大槻知忠

目 次

序章

結び目と3次元多様体の不変量

ひもを結ぶと結び目ができる．日常生活では，荷物を梱包するときなどにひもを結ぶが，梱包の目的や強度によって結び方はいろいろである．また，ネクタイ，水引等，装飾を目的とする結び目もある．古代より，実用，装飾目的のそれぞれについてさまざまな結び方が考案されてきた．

結び方をかえれば当然できる結び目のタイプもちがってくる．では，いったいどれくらいいろんな種類の結び目があるのだろうか？ どのように結ばっているかという結び目の型を数学的対象として研究するのが結び目理論である．

結び目の型を分類しようとする試みは19世紀からあったが，当初はそれに必要な数学的な道具立てが不十分であった．転機は新しい世紀とともにおとずれる．20世紀初めに位相幾何学の基礎が確立しホモロジー群などの道具立てが登場するにともない，結び目の研究は大いに発展した．アレクサンダー(Alexander)，アルティン(Artin)，ライデマイスター(Reidemeister)，ザイフェルト(Seifert)やそれに続く人々が「古典的」結び目理論の時代を築き，その後の結び目の研究の基礎となった．

さて，結び目理論では以下の話のテーマでもある不変量というもの(定義

は下記参照)が重要なはたらきをする．現在では多数の不変量が知られているが，最初の不変量であるアレクサンダー多項式は1920年代に発見された．アレクサンダー多項式は，ホモロジー群という「古典的な」というか当時の位相幾何学でのスタンダードな道具を用いて導くことができる．

結び目の不変量の研究は，1980年代半ばのジョーンズ多項式の発見とそれに怒濤のようにつづいてやってきた多数の新不変量の発見により，大きく様相をかえた．発端であるジョーンズ多項式が作用素環というまったく結び目理論とは異なる分野に由来するのをはじめ，統計力学におけるヤン-バクスター方程式の解や場の量子論という理論物理のトピックスと関連して，従来とはまったく異なる方法により多数の不変量が導入され，また結び目理論とさまざまな分野との関連も明らかになった．

さて，結び目とならぶ本書でのもう1つのトピックが3次元多様体である．3次元多様体とは(以下でもう少し詳しく説明するが)一言でいうと「まがった3次元空間」のことである．19世紀までは(数学や物理の研究に現れる)3次元空間といえばもっぱら「まっすぐの3次元空間」(すなわち，3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$)であったが，20世紀の冒頭に相対論が「宇宙はまがっている($\boldsymbol{R}^3$ ではない！)」ことを明らかにして以来，数学や物理の研究ではしばしば研究対象としてまがった空間(多様体)が取り扱われるようになった．20世紀のなかばに高次元の(5次元以上の)多様体の分類問題が(ある意味で)決着して以来，低次元の(4次元以下の)多様体論は幾何学の中で大きな位置をしめるようになる．

20世紀の冒頭には相対論と双璧をなす20世紀の物理理論である量子論も発見された．量子論によると空間内をとびまわる(電子などの)粒子は「運動する点」ではなくて「空間内にひろがる波動関数」であると説明される．与えられた空間に対して「その空間上の波動関数の全体がつくる空間」を考え，その構造をしらべることによりもとの空間の幾何的性質を導くという手法が1980年代に開発され，3次元多様体論もその影響を大きくうけることになる．量子論において粒子の相互作用を表す相関関数を経路の全体という無限次元

空間上の積分(経路積分)で表示するという手法が20世紀なかばにファインマン(Feynman)により導入されていたが，80年代のおわりにウィッテン(Witten)は3次元多様体の位相型のみに本質的に依存する場の量子論を考え，このときの(経路積分で表示された)相関関数が3次元多様体の位相不変量になることを主張した．このウィッテンの不変量はその後さまざまな方法で数学的に厳密に再構成され，3次元多様体の量子不変量とよばれて現在活発に研究されている．

本書では新不変量の中でも中心的な役割を演じる量子不変量をテーマに，結び目と(本書の後半では)3次元多様体の不変量について解説していきたい．

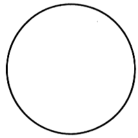
結び目と3次元多様体の不変量の研究のおもしろさは，幾何と代数の間にいかに橋渡しをして幾何的対象を代数的対象に帰着するか，という橋渡しの工夫にあると筆者はおもう．そのあたりのおもしろさが本書で読者に伝われば幸いである．

0・1　結び目とは

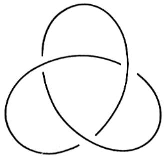
数学で取り扱う**結び目**とは，3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の中に像が自己交叉しないように連続にうめこまれた円周のことである．かんたんな結び目からいくつか列挙すると次ページの図1のようになる．変形して互いにうつりあう結び目をイソトピックという．たとえば K_1 と K_1' はイソトピックである．結び目理論では，イソトピックな結び目は同じ結び目だとみなして，それらを数学的対象として研究する．(このように幾何学的対象を「変形してうつりあうものは同じ」とみなして研究する幾何学を位相幾何学とよぶ．)

2つの結び目がイソトピックであることを示すことは比較的簡単である．なぜなら，それを示すには，単に実際に一方の結び目を変形してみせればよいからである．紙に証明をかくにはアニメーション風にその変形の途中図を図示すればよい．

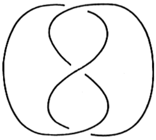
逆に2つの結び目がイソトピックでないことを示すことはあまり単純な問題ではない．なぜなら，あれこれ具体的に変形してみても互いにうつらなか



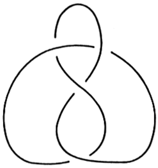
自明な結び目 K_0



3つ葉結び目 K_1



K_1'



8の字結び目 K_2

図1

ったというだけでは，証明が不十分だからである．いくら具体的な変形をくりかえしたとしても，もっと複雑な変形をすればできるかもしれない，という可能性を否定できない．ところが，以下にのべる「不変量」をつかうと，イソトピックでないことがいとも簡単に証明されるのである．

結び目は1つの円周を $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込んだものだが，n 個の円周を $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込んだものを n **成分の絡み目**とよぶ．とくに1成分の絡み目が結び目である．絡み目の中で一番かんたんなものは自明な結び目を互いにからまないようにならべてできる絡み目で，これを**自明な絡み目**という．円周のかわり

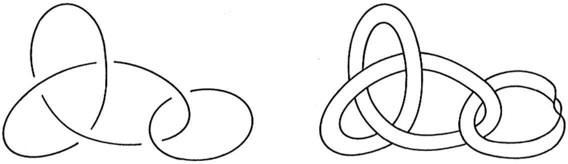


図2　絡み目の例，枠付き絡み目の例

にリボンを閉じて輪にしたものを $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込んだものを**枠付き結び目**(輪が複数個のときは，**枠付き絡み目**)とよぶ．

0・2　不変量とは

あるよくわかった集合 S について，写像

$$I:\{\text{結び目}\}\to S$$

が，「K と K' がイソトピックならば $I(K)=I(K')$ である」という性質をもつとき，I を結び目の**イソトピー不変量**(または単に，**不変量**)であるという．集合 S を結び目のイソトピー類の集合として自然に定まる写像 I は不変量の定義をみたすが，そのような自明な方法で定義される不変量はほとんど役にたたない．通常 S は整数の集合や多項式の集合など「よくわかった」集合を用いる．

たとえば第1章で定義されるアレクサンダー多項式という不変量の場合，図1の結び目に対する値は

$$\Delta_{K_0}(t)=1$$
$$\Delta_{K_1}(t)=t^2-t+1$$
$$\Delta_{K_1'}(t)=t^2-t+1$$
$$\Delta_{K_2}(t)=t^2-3t+1$$

のようになる．イソトピックな結び目 K_1 と K_1' に対しては必ず同じ値をとるが，イソトピックでない結び目 K_1 と K_2 に対しては不変量は一般に異なる値をとる．アレクサンダー多項式では K_1 と K_2 は実際に異なる値をとっているので，これより K_1 と K_2 はイソトピックではないという結論がでる．

0・3　多様体

各点においてその十分近くが n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ と同じ形をしている空間のことを n **次元多様体**という(正確な定義については，たとえば，[松本] を参照)．局所的には $\boldsymbol{R}^n$ と同じ形であるが大域的には(必ずしも) $\boldsymbol{R}^n$ ではない，ということがポイントである．たとえば，円周 $S^1=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$

$x^2+y^2=1\}$ は1次元多様体である．2次元多様体の例としては図3のような曲面 Σ_g(種数 g の閉曲面)がある．曲面 Σ_g が全世界であったとしてその中に2次元生物が住んでいたとしよう．その2次元生物が自分の周囲を見渡したとき，その生物が十分近視であったとしたら，その生物は自分が今 Σ_g の中にいるのか $\boldsymbol{R}^2$ の中にいるのか区別がつかないであろう．各点でそのような状況になっているような空間が2次元多様体なのである．ちなみに我々が住んでいる空間は宇宙規模のスケールで見ると3次元多様体である($\boldsymbol{R}^3$ とは限らない！)．つまり，我々は自分たちの住んでいる宇宙は局所的(宇宙全体の規模から見ると，人間が観測可能な範囲は局所的である！)に見ると $\boldsymbol{R}^3$ と同じ形をしていることを知っているが，大域的にみても $\boldsymbol{R}^3$ であるという保証は何もない．

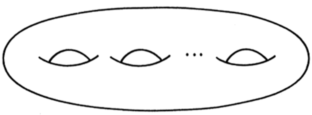


図3　種数 g の閉曲面 Σ_g

2つの多様体は連続的に変形して互いにうつりあうとき**同相**であるという．たとえば図4の左の多様体とまん中の多様体は連続的な変形でうつりあう(互いに同相である)が，これらの多様体を連続的に変形しても右の多様体にはならない(互いに同相でない)．多様体論では(しばしば)同相な多様体は同じ多様体とみなして，それらを数学的対象として研究する．1次元多様体，2次元多様体については同相なものを除けば，どのようなものがあるのか，すでに完全に分類されている．すなわち，1次元多様体で基本的なもの(正確に

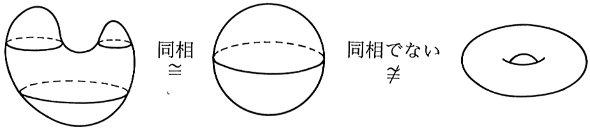


図4

は「連結で向きづけ可能で閉じている」もの)は円周 S^1 しかなく，2 次元多様体で基本的なものは曲面 Σ_g しかないことが知られている．そこで，本書(の後半)で話題になるのが 3 次元多様体である．3 次元多様体論の問題意識の 1 つは，標語的にいうと「宇宙の可能な形を位相幾何学的に分類せよ」ということである．

与えられた 2 つの多様体が同相であることを示すのは比較的容易である．すなわち，2 つの多様体が同相であるときは，それらを具体的に変形する手順を与えることによって，それらが確かに同相であることを示すことができる．

逆に，2 つの多様体が同相ではないことを示すことは(素手でやろうとすると)まったく容易ではない．そこで，結び目のときと同様，この場合も「不変量」が有効な手段となる．多様体の場合は，あるよくわかった集合 S について，写像

$$I : \{\text{多様体}\} \longrightarrow S$$

が「多様体 M と M' が同相ならば $I(M) = I(M')$ である」という性質をみたすとき，I を多様体の**位相不変量**(または単に，**不変量**)であるという．たとえば，第 8 章で紹介される量子 $SO(3)$ 不変量について，3 次元球面 S^3，射影空間 $\boldsymbol{R}P^3$，レンズ空間 $L(3,1)$ に対する値は

$$\tau_7^{SO(3)}(S^3) = 1$$
$$\tau_7^{SO(3)}(\boldsymbol{R}P^3) = -q-1-q^{-1}$$
$$\tau_7^{SO(3)}(L(3,1)) = q^4+q^5$$

ただし q は 1 の原始 7 乗根

となるので，これらの 3 次元多様体は互いに同相でないことがわかる．

0・4　群

演算が定義されているような集合のことを**群**という．とくに演算が可換のとき**アーベル群**であるという．アーベル群の典型的な例は整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ で，これはたし算によりアーベル群になる(この群は**位数 0 の巡回群**ともよばれ

る)．もう1つの典型的な例は集合

$$\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z} = \{[0],[1],[2],\cdots,[m-1]\}$$

に

$$[a]+[b] = [a+b \text{ を } m \text{ で割った余り}]$$

で演算をいれてできる群で，この群は**位数 m の巡回群**とよばれる．

2つのアーベル群 G, H があったとき，その直積集合

$$\{(g,h)\,|\,g\in G,\ h\in H\}$$

に

$$(g_1,h_1)+(g_2,h_2) = (g_1+g_2, h_1+h_2)$$

によって演算をいれてできる群を G と H の**直和**といい $G\oplus H$ とかく．任意の(有限生成の)アーベル群はいくつかの巡回群を直和してえられることが知られている(アーベル群の基本定理)．

たし算とかけ算の2つの演算が定義されている集合を**環**という．整数の集合 $\boldsymbol{Z}$，実数の集合 $\boldsymbol{R}$ などが環の典型的な例である．

0・5　ホモロジー群

多様体 M (一般に位相空間 M)について，M の中の向きのついた閉曲線を形式的な基底とするベクトル空間を $H_1(M;\boldsymbol{R})$ とおく．ただし $H_1(M;\boldsymbol{R})$ においては，(自己交叉をゆるして)変形して得られる閉曲線は互いに同じものとみなし，2つの閉曲線 a, b を連結してできる閉曲線は $H_1(M)$ において $a+b$ と同じものとおもう．この $H_1(M;\boldsymbol{R})$ を多様体 M の $\boldsymbol{R}$ 係数の**ホモロジー群**とよぶ．また，閉曲線のはるベクトル空間のかわりに閉曲線の $\boldsymbol{Z}$ 係数の1次結合の全体(を上と同様の方法で互いに同一視したもの)を $H_1(M;\boldsymbol{Z})$ とかき $\boldsymbol{Z}$ 係数のホモロジー群という．$\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ 係数でも同様に $H_1(M;\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})$ が定義される．ホモロジー群は多様体のもっとも古典的な位相不変量である．ホモロジー群の正確な定義についてはたとえば［田村］を参照されたい．

たとえば円周 S^1 に対してはホモロジー群 $H_1(S^1;\boldsymbol{R})$ は1次元の実ベク

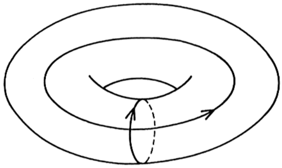


図 5　トーラスのホモロジー群の基底

トル空間になり，その基底は S^1 をちょうど 1 回まわる閉曲線である．$H_1(S^1; \boldsymbol{R})$ には閉曲線の合成により加法がはいっているので S^1 をちょうど n 周する閉曲線は $H_1(S^1; \boldsymbol{R})$ の元として基底の n 倍に等しい．

種数 1 の閉曲面 Σ_1 (**トーラス**とよばれる)の場合，$H_1(\Sigma_1; \boldsymbol{R})$ は 2 次元の実ベクトル空間になり，その基底は図 5 のような 2 つの閉曲線である．トーラス上の任意の閉曲線は適当に変形するとそれら 2 つの基底の閉曲線をいくつか合成したものに等しくなる．

0・6　テンソル積

n 次元ベクトル空間 V と m 次元ベクトル空間 W の基底がそれぞれ $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$，$\{f_j\}_{j=1,=,m}$ であるとき，e_i と f_j のすべての対を基底とするベクトル空間を V と W の**テンソル積**とよび $V \otimes W$ とかく．$V \otimes W$ の元として「e_i と f_j の対」を $e_i \otimes f_j$ とかく．すなわち $V \otimes W$ は $\{e_i \otimes f_j\}_{i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m}$ を基底とする nm 次元のベクトル空間である．

線型写像 $f: V \to V'$，$g: W \to W'$ について $V \otimes W$ の基底 $e_i \otimes f_j$ に $f(e_i) \otimes g(f_j) \in V' \otimes W'$ を対応させることにより線型写像 $V \otimes W \to V' \otimes W'$ が定まる．この線型写像を f と g の**テンソル積**とよび $f \otimes g$ とかく．

ベクトル空間 V の n 個のコピーのテンソル積を $V^{\otimes n}$ とかく．すなわち $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$.

0・7　リー群，リー環，量子群

量子群は本書では結び目不変量を構成するにあたっての補助的役割をはた

す．以下でかんたんに量子群に関連する用語を紹介するが量子群についての実質的な内容についてはたとえば［神保］を参照していただきたい．

群でかつ多様体の構造をもつものを**リー群**という．典型的な例は行列がつくる群で，たとえば

$$SL(2\,;\,\boldsymbol{C}) = \{2\times 2\ \text{の複素行列で行列式が}\ 1\ \text{であるもの全体}\}$$

は非可換なリー群の中で一番簡単なものの1つである．

リー群の単位元における接空間を**リー環**という．具体的には，リー環とはベクトル空間にブラケット積とよばれる演算が定義されたもので，リー環の典型例としては行列がつくるベクトル空間がある．たとえば，ベクトル空間

$$\mathfrak{sl}_2 = \{2\times 2\ \text{の複素行列で対角和が}\ 0\ \text{であるもの全体}\}$$

にブラケット積を $[X, Y] = XY - YX$ で定めるとリー環になる．リー群 $SL(2\,;\,\boldsymbol{C})$ の(単位元における接空間としての)リー環が $\mathfrak{sl}_2$ である．リー環 $\mathfrak{sl}_2$ の演算であるブラケット積はリー群 $SL(2\,;\,\boldsymbol{C})$ の演算(行列の積)が単位元のまわりで可換な演算からどれくらいずれているのかを表している．

行列がつくるベクトル空間としてリー環を導入するかわりに，ベクトル空間を基底で表示することによりリー環を構成することもできる．たとえば，リー環 $\mathfrak{sl}_2$ は基底

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ではられる3次元複素ベクトル空間に

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H$$

によってブラケット積を定めることによっても定義することができる．

与えられたリー環について，そのリー環の基底から生成される環にブラケット積に対応する関係式をいれた環を**包絡環**という．たとえばリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ とは E, F, H が生成する $\boldsymbol{C}$ 上の環(すなわち $1, E, F, H, E^2, EF, \cdots$ の複素係数の1次結合の全体)に

$$HE - EH = 2E, \qquad HF - FH = -2F, \qquad EF - FE = H$$

で関係式を定めたものである．

さらに包絡環の関係式を複素パラメータ q で変形して(すなわち「量子化」して)できる環を**量子群**という．たとえば $U(\mathfrak{sl}_2)$ を量子化してできる量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とは E, F, H が生成する(複素パラメータ q を含む) $\boldsymbol{C}$ 上の環に

$$HE-EH=2E, \qquad HF-FH=-2F, \qquad EF-FE=[H]$$

で関係式を定めたものである．ここで $[H]$ は複素パラメータ q による H の「量子化」で，

$$[H]=\frac{q^{H/2}-q^{-H/2}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}=H+\frac{1}{24}(H^3-1)h^2+\cdots$$

により定義される．ここで最後の項は $q=e^h=1+h+\frac{1}{2}h^2+\cdots$ とおいて真ん中の項を h のべき級数として展開することによりえられる．物理的には h はプランク定数にあたるきわめて微小な実数を想定している．古典極限 $q\to 1$ (つまり $h\to 0$) をとることにより量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ から包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ が復元することに注意しよう．

量子群というネーミングにもかかわらず量子群は群ではなくて環である．ではなぜ量子「群」というネーミングなのかというと，それは以下のような事情による．一般に空間 M があったときそれを「量子化」する手順として次のような方法がある．まず M 上の関数の全体がつくる可換環(関数環)を考える．さらに「関数環こそが空間(という概念)の実体であり，もとの M は関数環に付随した存在である」という立場をとる．そして関数環を量子パラメータで変形してえられる非可換環を「M の量子化」とよぶ(その非可換環を関数環としてもつような仮想的な空間が想定されている)．今の場合，リー群という空間上の関数(を単位元のまわりでテーラー展開したもの)の全体を包絡環とみなすことができ，これを量子パラメータで変形してえられる非可換環を「量子化されたリー群」という意味で「量子群」とよぶのである．詳しくは［神保，江沢］を参照されたい．

0・8　表現

リー群 G とベクトル空間 V について写像 $\rho: G\to \mathrm{Aut}(V)$ が

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

ただし g, h は G の任意の2元

をみたすとき ρ を G の V 上の**表現**という．（かんたんに，V のことを表現ということもある.）ここで $\mathrm{Aut}(V)$ は V の自己同型写像の全体がつくる群である．たとえば行列 $A \in SL(2\,;\boldsymbol{C})$ について $v \in \boldsymbol{C}^2$ を Av にうつす $\boldsymbol{C}^2$ の自己同型を対応させることにより $SL(2\,;\boldsymbol{C})$ の表現がえられるが，この表現は $SL(2\,;\boldsymbol{C})$ の**ベクトル表現**とよばれる．$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{C}^2)$ の元を行列で表示すると，ベクトル表現 ρ について $\rho(A) = A$ である．与えられたリー群についてその表現は(一般に)無数にある．

リー群 G の表現 V_1, V_2 が与えられているとき，それらの直和 $V_1 \oplus V_2$，テンソル積 $V_1 \otimes V_2$ 上のそれぞれに自然に G の表現が定義される．それらをそれぞれ**直和表現**，**テンソル表現**とよぶ．（本書で現れるリー群については）2つの表現の直和にならないような表現を**既約**な表現であるという．

リー環 $\mathfrak{g}$ について線型写像 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ で

$$\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$$

ただし X, Y は $\mathfrak{g}$ の任意の2元

をみたすものをリー環の**表現**という．ここで $\mathrm{End}(V)$ は V から V への線型写像全体がつくる環である．たとえば行列 $A \in \mathfrak{sl}_2$ について $v \in \boldsymbol{C}^2$ を $Av \in \boldsymbol{C}^2$ にうつす $\boldsymbol{C}^2$ から $\boldsymbol{C}^2$ への線型写像を対応させることにより $\mathfrak{sl}_2$ の表現がえられるが，この表現は $\mathfrak{sl}_2$ の**ベクトル表現**とよばれる．$\mathrm{End}(\boldsymbol{C}^2)$ の元を行列で表示すると，ベクトル表現 ρ について $\rho(A) = A$ である．

リー環の表現を1つ与えると，それを「展開」することによって自然に包絡環の表現がえられる．すなわち包絡環の生成元はもとのリー環の基底なので，リー環の表現を与える写像を包絡環全体に自然に拡張することにより，包絡環の表現がえられる．さらにその包絡環の表現をパラメータ q で変形すると量子群の表現がえられる．

すべてのリー環とそれらのすべての表現は現在までに代数的に完全に分類されていて，それらは整理されて整然と系列化されている．さらに「量子群

とその表現が1組あると，結び目不変量が1つできる」ということが結び目不変量にとってのポイントで，すなわちリー環とその表現の系列化にともなって結び目不変量を系列化して理解することができる．1980年代末の量子群の登場によって，1980年代後半に散発的にえられていた無数の結び目不変量が系列化され，われわれはそれらの不変量を整然と把握することができるようになった．(詳しくは本文参照)

0・9 グラフ

頂点と辺からなる図形(たとえば図6のような図形)を**グラフ**という．グラフにおいては，各辺がどの頂点とどの頂点をつないでいるのかといった組合せ的情報にのみ着目することにして，たとえばグラフを図にかいたときの形は気にしないことにする．つまり，2つのグラフが与えられたとき，頂点を辺でつなぐつながり具合いが同じであれば(図にかかれているときの頂点や辺の位置関係にかかわらず)それらを同じグラフとみなす．

頂点からでる辺の本数が d 本のとき，その頂点は d **価**であるという．すべての頂点が3価であるようなグラフを**3価グラフ**といい，すべての頂点が1価か3価のどちらかであるようなグラフを**1,3価グラフ**という．

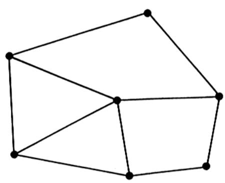


図6 グラフの例

1章

結び目の量子不変量の出現

第1章では結び目の代表的な「古典的」不変量であるアレクサンダー多項式と，結び目の不変量の発展の転機となったジョーンズ(Jones)多項式について解説し，ジョーンズ多項式発見の以前と以降での雰囲気のちがいをみてみたい．

1・1　アレクサンダー多項式

ジョーンズ多項式について話をすすめる前に，結び目の代表的な「古典的」不変量であるアレクサンダー多項式についてふりかえってみよう．アレクサンダー多項式は「古典的な」道具を用いて定義され，その手法には1920年代の素朴な雰囲気が感じられる．以下では定義の概略を説明するが，アレクサンダー多項式の詳しい定義や性質等については［Rol，河内］を参照されたい．

3つ葉結び目 K_1 を例にとってアレクサンダー多項式の定義を説明する．(他の結び目についても同様である.）まず K_1 を境界とするような向き付け可能な(裏表のある)曲面 F をとる．(このような曲面 F を結び目のザイフェルト曲面とよぶ.）次ページの図1において，2つの長方形を3つのバンドでつないだものが F で，その境界が3つ葉結び目 K_1 となっている．すな

わち K_1 はバンドの両側の側線と長方形の境界でバンドへはりついていない部分からなる．

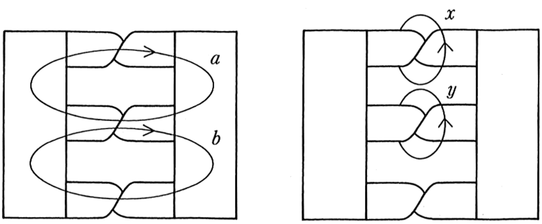


図 1

F にそって S^3-K_1 をきりひらいたものを $\hat{M}$ とし，$\hat{M}$ の境界としてあらわれている F と同じ形の切り口を F^+, F^- とする．$\hat{M}_i\,(i\in \boldsymbol{Z})$ を $\hat{M}$ のコピーとし，その境界を F_i^+, F_i^- とする．F_i^+ と F_{i+1}^- をはり合わせることによって $\hat{M}_i$ を順につなげたものを $\tilde{M}$ とおき(図 2)，そのホモロジー群 $H_1(\tilde{M})$ を考える．$\tilde{M}$ には図 2 のように $\hat{M}_i$ を $\hat{M}_{i+1}$ にうつす写像 t が作用するので，これによって $H_1(\tilde{M})$ は自然に $\boldsymbol{R}[t, t^{-1}]$ 加群になる．

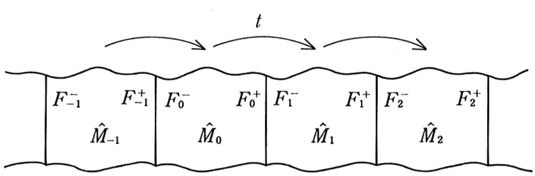


図 2

具体的には $H_1(\tilde{M})$ は次のように計算される．$H_1(F)$ の基底は図 1 左図の a, b であるが，それらを F の表または裏へ少しずらしてやると切り開いた面 F^+, F^- についての H_1 の基底が図 3 のように得られる．

これらを変形して，$H_1(\hat{M})$ の基底 x, y (図 1 の右図)で表すと

$$a^+ = x, \qquad b^+ = y,$$

$$a^- = -y, \qquad b^- = x+y,$$

となる．さらに $\tilde{M}$ をつくるにあたってコピー $\hat{M}_i$ の境界 F_i^+ と F_{i+1}^- をはり

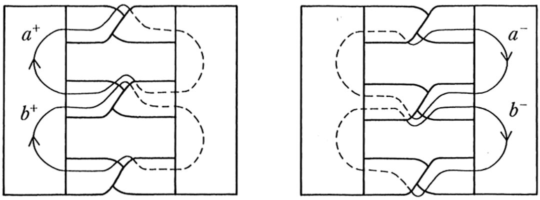


図 3

合わせることに注意すると，$H_1(\tilde{M})$ は次式のように計算される．

$$
\begin{aligned}
&H_1(\tilde{M})\\
&= \langle x_i, y_i, a_i^\pm, b_i^\pm \rangle \Big/ \begin{matrix} a_i^+ = x_i, & b_i^+ = y_i, \\ a_i^- = -y_i, & b_i^- = x_i + y_i, \\ a_i^+ = a_{i+1}^-, & b_i^+ = b_{i+1}^- \end{matrix}\\
&= \langle x_i, y_i \rangle \Big/ \begin{matrix} x_i = -y_{i+1}, \\ y_i = x_{i+1} + y_{i+1} \end{matrix}\\
&= \langle y_i \rangle / (y_{i+2} - y_{i+1} + y_i = 0)\\
&= \boldsymbol{R}[t, t^{-1}]/(t^2 - t + 1)
\end{aligned}
$$

一般に，他の結び目 K についても同様に $\tilde{M}$ が構成されて，$H_1(\tilde{M})$ は $\boldsymbol{R}[t, t^{-1}]/(f(t))$ の形になる．この多項式 $f(t)$ を $\Delta_K(t)$ とかき，結び目 K のアレクサンダー多項式とよぶ．2つの結び目 K と K' がイソトピックのとき，それらからできる $\tilde{M}$ と $\tilde{M}'$ は同じ形(正確には，同相)になるので，$H_1(\tilde{M})$ と $H_1(\tilde{M}')$ は $\boldsymbol{R}[t, t^{-1}]$ 加群として同型になる．よって $\Delta_K(t) = \Delta_{K'}(t)$ となり，アレクサンダー多項式は不変量であることがわかる．

アレクサンダー多項式は，結び目の補空間の基本群の表示を自由微分することによって構成することもできる(詳しくは［河内］参照)．ホモロジー群や基本群といった，位相幾何の初期からあった「古典的な」道具を用いて素朴な手法で定義されるというのがアレクサンダー多項式の大きな特徴である．

1・2　組みひも

組みひもはアルティンによって1920年代に導入された．以下でみるように，組みひもを用いることによって，結び目や絡み目を自然な方法で代数的な対象に帰着することができる．ジョーンズ多項式の導入の準備として，その方法をふりかえってみよう．組みひもについて以下では概略をのべるが詳しくは［河野］等をごらんいただきたい．

何本かのひもが図4のように下から上へのぼりながらからんでいるようなものを**組みひも**という．組みひもの両端を固定したまま，内部を変形して互いにうつりあう(すなわち両端を固定してイソトピックである)組みひもは同じ組みひもとみなす．

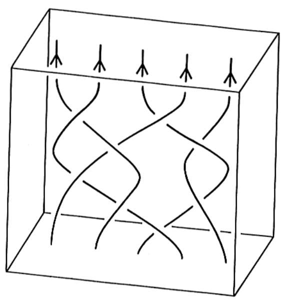
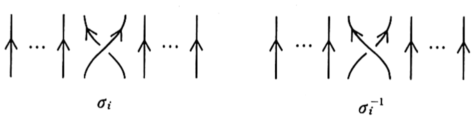


図 4

n 本のひもからなる任意の組みひもは図5の組みひも σ_i と σ^{-1} $(i=1,2,\cdots,n-1)$ を上下にはり合わせてつくることができる．上から下へ組みひもをはり合わせたとき左から右へ対応する文字をならべることにすると，たと



左から i 番目と $i+1$ 番目のひもをねじっている

図 5

えば図4の組みひもは

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_4^{-1}\sigma_1\sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1}$$

のように表される.

組みひもをたてにはりあわせる操作を積として，n 本のひもからなる組みひも全体の集合は群になる．これを n 次の**組みひも群**といい B_n とかく．群 B_n は以下の表示をもつことが知られている.

生成元：$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_{n-1}$

関係式：$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad (|i-j| \geqq 2)$

$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-2)$

与えられた組みひもについて，図6のように上下をつなげて絡み目をつくる操作のことを組みひもを「閉じる」という．任意の絡み目 L について，うまい組みひも b をとってくると，L は b を閉じてできる絡み目とイソトピックになることが知られている.

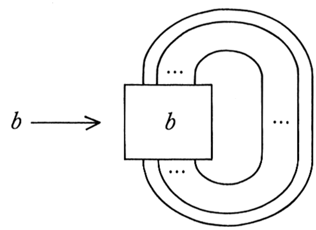


図 6

マルコフ(Markov)の定理　組みひも b_1, b_2 を閉じて得られる絡み目を L_1, L_2 とする.「L_1 と L_2 がイソトピックである」ことと「b_1 に次の操作 MI, MII をくり返しほどこすことにより b_2 が得られる」ことは同値である.

MI ：$ab \longleftrightarrow ba \qquad (a, b \in B_n)$

MII：$b\sigma_n \longleftrightarrow b \longleftrightarrow b\sigma_n^{-1} \qquad (b \in B_n)$

ここで $b\sigma_n^{\pm1}$ とは，b の右に1本のまっすぐなたてひもをつけ足して B_{n+1} の元とみなし，それに $\sigma_n^{\pm1}$ を合成したものである．MI, MII は**マルコフ移動**と

よばれている．

マルコフの定理を標語的にかくと

$$\{\text{絡み目}\}/\text{イソトピック} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)/\text{MI, MII}$$

となる．左辺が幾何的な対象であるのに対して，右辺は代数的に記述されていることに注意されたい．この等式をとおして，絡み目を代数的対象(すなわち右辺の解析)に帰着して研究することができる．

1・3　ジョーンズ多項式

1984年に作用素環の専門家であるジョーンズによって絡み目の新不変量「ジョーンズ多項式」が発見された．くしくもMSRI(アメリカ，カリフォルニア州のバークレーにある数理科学研究所)のこの年の年度計画は作用素環と低次元位相幾何であった．研究所には作用素環の専門家であるジョーンズ等とトポロジーの研究者が多数訪れて活発に研究交流し，この年にジョーンズ多項式にまつわる重要な結果が次々に得られた．ジョーンズ多項式の発見とこれをめぐるこの年のバークレーの活気は，その後のさまざまな絡み目の新不変量発見の幕開けとなるのである．

ジョーンズ多項式はその後，量子$(\mathfrak{sl}_2, V)$不変量(Vはリー環$\mathfrak{sl}_2$のベクトル表現)として再定義された．発見者ジョーンズによるもともとのジョーンズ多項式の構成は，各nについて組みひも群B_nからジョーンズ代数とよばれる作用素環への表現をつくりそのトレースをとる，という方法であったが，以下では一般の量子不変量の構成にそった構成を説明する．

Vを複素2次元ベクトル空間$\boldsymbol{C}^2$とする．複素パラメータtをふくむ組みひも群の表現ρ_nを次式で与える．

$$B_n \xrightarrow{\rho_n} \mathrm{End}(\overbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}^{n})$$

$$\sigma_i \longmapsto \underbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}_{i-1} \otimes R \otimes \underbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}_{n-i-1}$$

$$ただし\ R=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 & t-t^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

絡み目 L が n 本のひもからなる組みひも b を閉じて得られるとき，$\rho_n(b)$ のトレースをとることにより，L の不変量をつくることを考える．単純にトレースをとったもの $\mathrm{trace}(\rho_n(b))$ がマルコフ移動 MI で不変であるためには $\mathrm{trace}_2 R^{\pm 1}=1$ が要請されるが，実際に計算してみると，残念ながらこの式は成り立たない．(ここで trace_2 とは $V\otimes V$ の第2成分についての対角和である．)　そこで，次のように補正をしてからトレースをとることにする．
$h=\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ とおくと，

$$R^{\pm 1}\cdot h\otimes h = h\otimes h\cdot R^{\pm 1} \tag{1}$$

$$\mathrm{trace}_2(R^{\pm 1}\cdot h\otimes h) = h \tag{2}$$

となることが直接計算することにより確かめられる．(1)とトレースの性質より $\mathrm{trace}(h^{\otimes n}\cdot\rho_n(b))$ は再びマルコフ移動 MI で不変になることがわかる．さらに(2)より $\mathrm{trace}(h^{\otimes n}\cdot\rho_n(b))$ はマルコフ移動 MII でも不変となる．そこで

$$V_L(t) = \mathrm{trace}(h^{\otimes n}\cdot\rho_n(b)) \tag{3}$$

とおくと，マルコフの定理より $V_L(t)$ は絡み目 L の不変量となることがわかる．これを絡み目 L の**ジョーンズ多項式**とよぶ．

1・4　輪切り方式によるジョーンズ多項式の再構成

結び目を $\boldsymbol{R}^3$ 内の1次元図形とみなし，これを $\boldsymbol{R}^2$ に射影した像を結び目の**図式**という．結び目は3次元空間内の図形であるが，図式は平面内の図形であることに注意されたい(次ページ参照)．

さらに図8のように図式を水平線で輪切りにし，各断面について，ひもが上向きに横切っているところには V (今の場合は $V=\boldsymbol{C}^2$)を，下向きに横切っているところには双対空間 V^* を対応させて，各水平線ごとにこれらの

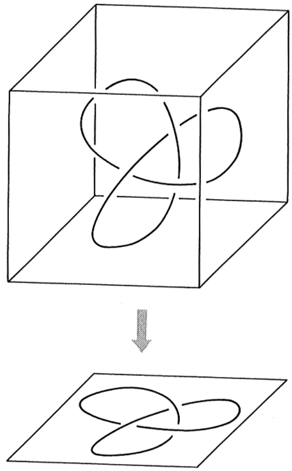
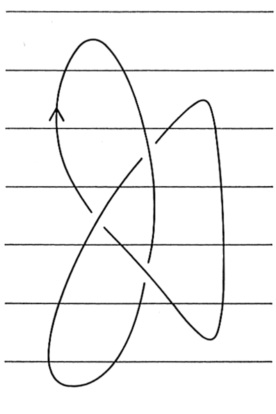


図 7



$$\begin{array}{c} \boldsymbol{C} \\ \uparrow \\ V\otimes V^* \\ \uparrow \\ V\otimes V^*\otimes V\otimes V^* \\ \uparrow \\ V\otimes V\otimes V^*\otimes V^* \\ \uparrow \\ V\otimes V\otimes V^*\otimes V^* \\ \uparrow \\ V\otimes V^*\otimes V\otimes V^* \\ \uparrow \\ V\otimes V^* \\ \uparrow \\ \boldsymbol{C} \end{array}$$

図 8

テンソル積をとる．ひもが横切っていない水平線には $\boldsymbol{C}$ を対応させる．これらのテンソル積の間の写像をうまく定めることで $\boldsymbol{C}$ から $\boldsymbol{C}$ への合成写像をつくると，その合成写像による 1 の像がジョーンズ多項式に等しくなることが知られている．

各テンソル積の間の写像の定め方について，輪切りを十分細かく分割すると各部分は図 9 ような形になる．(交点の近傍でのひもの向きは上向きとは限らないが，輪切りの前に図式を適当に変形することによって上向きにできる.) 図 9 左上の線形写像 $V\otimes V\to V\otimes V$ はジョーンズ多項式の定義で与えた行列 R に等しくとる．左下の写像は R^{-1} とおく．さらに図 9 の他の線

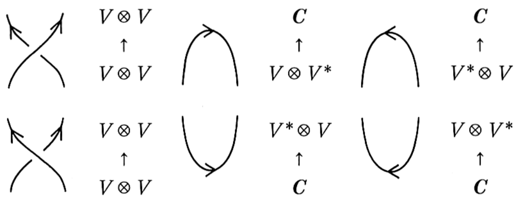


図 9

形写像も(ここではその具体形は省略するが)与えることによりジョーンズ多項式を再定義することができる．

量子場の理論における図 8 の物理的なイメージは，水平線(正確には図式における水平線が表す 3 次元空間内の水平面)が世界面を表し，縦軸が時間を表し，水平面で絡み目をきった断面が粒子を表す．時間とともに水平面を下から上へ動かして絡み目の断面をとると，世界面の中を粒子がとびまわっている状態となる．映画のフィルムを 1 コマずつきって，水平に積み重ねた状態を想像していただきたい．絡み目は，粒子が誕生してとびまわり消滅する，という「平面内の粒子の一生」を表していることになる．このような物理的背景をもつ輪切り方式によって構成することができる，というのがジョーンズ多項式の大きな特徴である．

1・5　量子不変量へ

ある種の粒子についての「粒子の一生」の物理量がジョーンズ多項式だとおもうことにすると，別種の粒子に対応してジョーンズ多項式とは別の不変量があることが期待される．そこで，新不変量をさがすプログラムとして一般にベクトル空間 V について，図 9 の線形写像をうまく定めて，輪切り方式

により絡み目の不変量を構成することを考える．勝手な線形写像を与えてもいつでも不変量ができるとは限らないが，どういう条件をみたす線形写像を与えれば不変量ができるのかという条件は具体的に知られている．不変量をつくるにあたり，とくに重要なのは図9左上の線形写像 $V\otimes V\to V\otimes V$ で，この写像のみたすべき条件はヤン-バクスター方程式とよばれ，その解は R 行列とよばれている．R 行列が1つあれば(図10における他の線形写像についての条件も若干あるが)，だいたい絡み目の不変量が1つできるとおもってよい．

ヤン-バクスター方程式はもともと統計力学の可解格子模型を与えるための条件であった．1980年代に輪切り方式で絡み目の不変量ができることが明らかになると，当時統計力学で知られていた多数の R 行列を用いることにより多数の結び目不変量が発見された．

当初は R 行列はヤン-バクスター方程式の解をめのこでさがすことにより得られていたが，その後，ベクトル空間 V に量子群を作用させて，量子群の作用と可換な線形写像 $V\otimes V\to V\otimes V$ をとることにより，多数の R 行列が組織的に再構成された．一見ばらばらであった多数の既知の R 行列は量子群を用いることにより統一的に理解されるようになった．すなわち，リー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 V を与えるごとに，$\mathfrak{g}$ を変形してえられる量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ と V を変形してえられる $U_q(\mathfrak{g})$ の表現ができるが，そこからできる R 行列を用いて得られる結び目の不変量が量子 $(\mathfrak{g}, V)$ 不変量とよばれるようになり，「量子不変量」をキーワードに結び目の(一見ばらばらであった)多数の多項式不変量が整理された．

量子不変量の概念の登場は，それ以前の多数の結び目不変量の統一的理解をたすけるとともに，結び目の多項式不変量が実にたくさん(リー環とその表現の数くらい！)あることを我々に再認識させた．ジョーンズ多項式が発見された当時は新不変量の出現は素直によろこばしいことであったが，これだけ多数の不変量があると，個々の不変量を対象に研究するには数が多すぎて収拾がつかなくなってきた．1990年代にはいってそれを収拾するべくで

てきた2つの動きが，共通する性質で量子不変量をくくってしらべるという有限型不変量(バシリエフ不変量)の概念の登場と，単一の不変量で量子不変量を統一するという普遍量子不変量(コンツェビッチ不変量)の発見である．

次章以降では，量子不変量に関連する結び目の不変量について，さまざまな多項式不変量，結び目解消操作，線形スケイン理論，空間グラフの不変量，バシリエフ不変量，ヤン-バクスター方程式，ランダム・ノット，量子群，コンツェビッチ不変量などを具体的な話題として見ていきたい．さらに本書の後半では量子不変量に関連する3次元多様体の不変量について，ウィッテンの経路積分公式，量子 $SU(2)$ 不変量，量子 G 不変量，トゥラエフ-ビロ不変量，ダイグラーフ-ウィッテン不変量，位相場の量子論，キャッソン-ウォルカー不変量と量子不変量との関係，$U(1)$ 不変量，$SU(2)$ 不変量の特定の q での値，摂動的不変量，有限型不変量，普遍摂動的不変量などをとりあげたい．

2章

多項式不変量時代

本章は，ジョーンズ多項式をはじめとする，絡み目の多項式不変量の話をする．第2•4節を除いては，量子群などの大道具のなかった牧歌的な時代の話である．使った手法は「絵で計算をする」ことだけであり，式を扱うように絵を描いていた時代であった．また，第2•4節の内容も，発想は同様に素朴なものであり，特に違和感なしに読めると思う．

2・1 向きのついた絡み目の多項式不変量

3つの絡み目 L_+, L_-, L_0 が次の図式で表されている状況を考えよう．

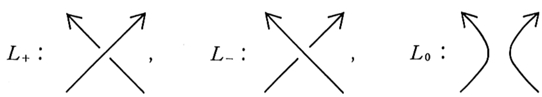


図1

ここで，これら3つは，この図で表されている部分以外は同じものを表していることとする．この場合，第1章で定義されたアレクサンダー多項式を適当に正規化($\pm t^{k/2}$ 倍)することによって

$$\Delta_{L_+}(t)-\Delta_{L_-}(t) = -(t^{1/2}-t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t) \tag{1}$$

が成立することがわかる．アレクサンダー多項式において $z=t^{1/2}-t^{-1/2}$ とおいたものはその発見者の名前をとってコンウェイ(Conway)多項式と呼ばれる．コンウェイ多項式は z についての(負の冪を含まない)多項式であることがわかる．

また，ジョーンズ多項式については，第1章で定義された R 行列と h 行列に関して

$$t^{-2}(h\otimes h)\cdot R-t^{2}(h\otimes h)\cdot R^{-1}$$
$$=-(t-t^{-1})(h\otimes h)\cdot I$$

という関係式が成り立つことを考えると，変数 t を $t^{1/2}$ と置き直すことにより，

$$t^{-1}V_{L_+}-tV_{L_-}=-(t^{1/2}-t^{-1/2})V_{L_0} \tag{2}$$

が成立していることがわかる．

(1)と(2)を見ると次のような式をみたす絡み目の不変量の存在が期待される．

$$\begin{cases} a^{-1}P_{L_+}(a,z)-aP_{L_-}(a,z)=zP_{L_0}(a,z) \\ \quad \text{(スケイン関係式)} \\ P_{\bigcirc}(a,z)=(a^{-1}-a)/z \end{cases} \tag{3}$$

ここで，○は自明な結び目である．これが，実際に不変量を定義することが多くの研究者(ホステ(Hoste)，オクネアヌ(Ocneanu)，ミレット(Millett)，フレイド(Freyd)，リコリッシュ(Lickorish)，イェッター(Yetter)，プシティスキー(Przytycki)，トラチック(Traczyk))によってほぼ同時期(ジョーンズ多項式発見直後)に発見された．これは，発見者の(一部の)イニシャルをとって**HOMFLY多項式**と呼ばれており，アレクサンダーやジョーンズ多項式を特別な場合として含んでいる．多項式不変量時代の幕開きである．

HOMFLY多項式の値の例をあげてみよう．からまっていない2成分の自明な絡み目 ○○ を L_0 としよう．そして，スケイン関係式を使うために，図2で示されたところに注目する．すると，L_+ も L_- もからまっていない結び目となるので，スケイン関係式と，$P_{L_+}(a,z)=1$，$P_{L_-}(a,z)=1$ より

$$zP_{L_0}(a, z) = a^{-1}P_{L_+}(a, z) - aP_{L_-}(a, z)$$
$$= a^{-1} - a$$

となる．すなわち，

$$P_{\bigcirc\bigcirc}(a, z) = -az^{-1} + a^{-1}z^{-1}$$

である．実際には，HOMFLY 多項式は負冪もあるローラン多項式である．

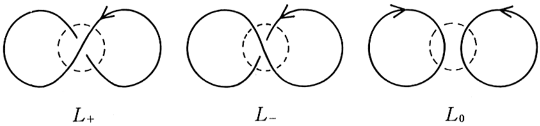


図 2

同様に図 3 左のホップ絡み目を L_+ として計算すると，

$$P_{L_+}(a, z) = a^2P_{L_-}(a, z) + azP_{L_0}(a, z)$$

より，図 3 から

$$P_{L_+}(a, z) = -a^2\frac{a-a^{-1}}{z} + az$$
$$= -a^3z^{-1} + az^{-1} + az$$

となる．

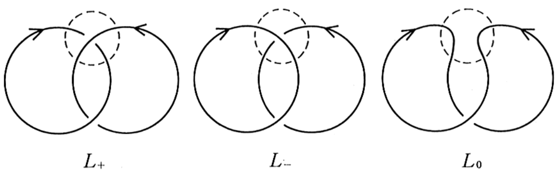


図 3

さらに一般に(3)の 2 つの式からどのように HOMFLY 多項式が計算されるかを，3 つ葉結び目をもとに説明しよう．次ページの図 4 で示されたような絡み目からなる図を考える．これらは，下に向かって枝分かれしているが，各枝の根元に当たる部分を L_-(あるいは，L_+)と思えば，左の枝が L_+(あるいは，L_-)，右の枝が L_0 に対応する．そして，枝の先端は自明な絡み目にな

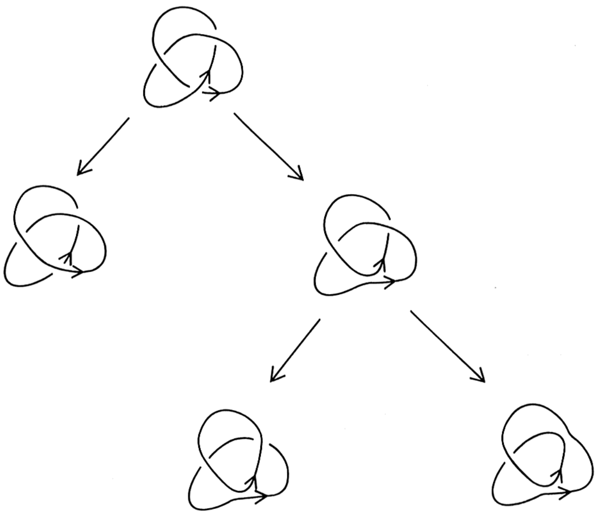
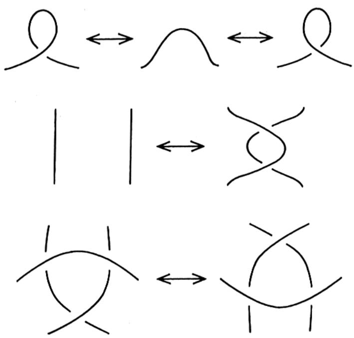


図 4

っている．自明な絡み目に対しては，(3)の 2 番目の式により上記と同様の方法をくり返すと値がわかる．また，各枝分かれに対して(3)の最初の式を使うことによって，枝の根本の HOMFLY 多項式の値がわかることから，この作業を繰り返すことによりどんな絡み目に対しても HOMFLY 多項式を計算できることになる．

HOMFLY 多項式が実際に絡み目の不変量であることを証明する方法はいろいろあるが，ホステ，ミレット，リコリッシュ，プシティスキー，トラチックらの方法のあらすじを説明しよう．第 2•4 節に別の証明があるので，そちらも参照されたい．

まず，絡み目の図式において次のような 3 種類の局所的な移動を考える．



ライデマイスター移動 I (RI)

ライデマイスター移動 II (RII)

ライデマイスター移動 III (RIII)

図 5

そのとき，

ライデマイスターの定理　「2 つの絡み目の図式がイソトピックな絡み目を表す」ことと「一方の図式にライデマイスター移動 I, II, III を繰り返し施すことにより他方が得られる」ことは同値である．

が成り立つ．つまり，

$$\{\text{絡み目}\}/\text{イソトピック} = \{\text{絡み目の図式}\}/\text{RI, RII, RIII}$$

となる．第 1 章のマルコフの定理と比較してみると RI が MII に，RII が $\sigma_i\sigma_i^{-1} = 1$ に，RIII が $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ に対応していることがわかる．

ホステらの証明方法は，HOMFLY 多項式が絡み目を表す図式の取り方によらないこと，および定義式(3)の適用の順序によらないことを示すのである．ライデマイスターの定理を使えば，この証明は煩雑ではあるが初等的である．

さて，新しい不変量が得られたら，それがどれくらい強いか(どれくらいたくさんの絡み目を分類できるか)を調べたくなるのが自然である．HOMFLY 多項式はアレクサンダーやジョーンズ多項式を含んでいるのであるが，実際にそれら 2 つより強力であることが知られている．しかし，HOMFLY

多項式では区別できない絡み目がいくらでも存在することが，金信泰造により示された．

2・2　向きのついていない絡み目の多項式不変量

次に，絡み目に向きがついていない場合を考えよう．この場合は交叉をなくす方法が2種類考えられるので，次の図のような4種類の絡み目の間の関係を考えることになる．

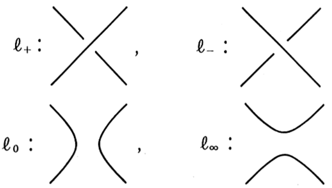


図 6

これらの絡み目の間に

$$Q_{\ell_+}(x)+Q_{\ell_-}(x)=x\{Q_{\ell_0}(x)+Q_{\ell_\infty}(x)\}$$

という関係式を考える．自明な絡み目 O_n に対して $Q_{|O_n|}(x)=2/x-1$ ($|O_n|$ は向きを忘れた自明な絡み目)とおくことによって，多項式不変量(**Q 多項式**)が得られることがホウ(Ho)，ブラント(Brandt)，リコリッシュ，ミレットによって示された．(ここでも，HOMFLY 多項式の場合と同様に，じつは，$Q_{|O_1|}(x)=1$ という条件だけでよい．)

さて，ここで，Q 多項式を2変数に拡張するために，枠付き絡み目(序章参照)を導入しよう．「枠」とは絡み目の各成分(ひも)のねじれのことである．絡み目の図式に「ライデマイスター移動 I, II, III で移り合う」という同値関係を入れたのが絡み目のイソトピー類であった．これに対し枠付き絡み目のイソトピー類は，絡み目の図式に「ライデマイスター移動 II, III で移り合う」という同値関係(正則イソトピック)を入れたときの同値類になる．向きのついた枠付き絡み目 $\mathscr{L}$ に対して，各交叉で  を $+1$,  を -1 とおい

て和をとったものを $w(\mathscr{L})$ と書き，ねじれ数と呼ぶ．

そして，枠付き絡み目の不変量 $\Lambda_{\mathscr{L}}(a, z)$ を Q 多項式と同様に次の 3 式をみたすものとして定義する．（$\mathscr{L}_{\pm}$ などは，先ほどと同じ図式であるが，今度は正則イソトピー類を表す．）

$$\begin{cases} \Lambda_{\mathscr{L}_+}(a, z) + \Lambda_{\mathscr{L}_-}(a, z) \\ \qquad\qquad\qquad = z\{\Lambda_{\mathscr{L}_0}(a, z) + \Lambda_{\mathscr{L}_\infty}(a, z)\} \\ \Lambda_{\text{[1]}}(a, z) \qquad = a\Lambda_{\text{[2]}}(a, z) \\ \Lambda_{U_n}(a, z) \qquad = ((a + a^{-1})/z - 1)^{n-1} \end{cases} \tag{4}$$




ここで，U_n はねじれのない自明な絡み目（の正則イソトピー類）である．（ここでも，$\Lambda_{U_1}(a, z) = 1$ で十分．）また，(4)の 2 番目の式を使うことによって，ねじれのある自明な絡み目のねじれをなくすことができることに注意されたい．ある意味で，a という変数はねじれを計っているといえる．$\Lambda_{\mathscr{L}}(a, z)$ が枠付き絡み目の不変量であることは，たとえば，HOMFLY 多項式の場合と同様に，ライデマイスター移動 II, III で不変であることを使って示すことができる．

そして，向きのついた絡み目 L のカウフマン(Kauffman)多項式 $F_L(a, z)$ を $a^{-w(\mathscr{L})}\Lambda_{\mathscr{L}}(a, z)$ で定義する．ここで，$\mathscr{L}$ は，L のある枠付き絡み目としての表示である（つまり，$\mathscr{L}$ の「枠」を忘れたものが L）．カウフマン多項式がライデマイスター移動 I で不変なことはすぐに示せて，HOMFLY 多項式とは違った，向きのついた絡み目の 2 変数多項式不変量になる．ただし，この不変量でも区別できない絡み目がまたもやいくらでも存在する．

2・3　特殊値の位相幾何的意味

第 1 章の説明にあったように，結び目 K のアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は，3 次元球面から結び目（およびそのザイフェルト曲面）を除いた空間 $\hat{M}$ を無限個貼り合わせてできる空間 $\tilde{M} = \cdots \cup \hat{M}_{i-1} \cup \hat{M}_i \cup \hat{M}_{i+1} \cup \cdots$ のホモロジーの位数として定義された（$\hat{M}_i$ は $\hat{M}$ のコピー）．HOMFLY 多項式

やカウフマン多項式については，このような解釈は可能であろうか？　この節では，これらの多項式不変量に特殊な値を代入して得られる量の位相的な解釈を，結び目について説明する．

$\hat{M}$ を定義したときと同様に M_n を $(\hat{M}_1 \cup \hat{M}_2 \cup \cdots \cup \hat{M}_n) \cup D^2 \times S^1$ とおく．ここで，M_i と M_{i+1} が，また，M_n と M_1 も貼り合わされている．また，最後の $D^2 \times S^1$ はソリッド・トーラス(穴あきドーナツ)であり，こうすることによって，境界のない3次元多様体ができる．この空間のホモロジー群 $H_1(M_n(K))$ を考え，$|H_1(M_n(K))|$ を，もし，$H_1(M_n(K))$ が無限個の要素を含んでいるなら0，そうでなければ要素の数として定義する．アレクサンダー多項式が $H_1(\tilde{M})$ を表していることに対応して，次の式が知られている．

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Delta_K(\exp(2k\pi\sqrt{-1}/n)) = |H_1(M_n(K))|$$

ジョーンズ多項式の定義式とアレクサンダー多項式の定義式のそれぞれに $t = -1$ を代入すると同じ式になることから，

$$V_K(-1) = \Delta_K(-1) = |H_1(M_2(K))|$$

がわかる．

ジョーンズ多項式の1の4乗根での値については，次のことがジョーンズ自身によって示されている．

$$V_K(\sqrt{-1}) = (-1)^{\mathrm{Arf}(K)}$$

ここで，$\mathrm{Arf}(K)$ は，結び目 K のアルフ不変量と呼ばれ，コンウェイ多項式の2次の係数(mod 2)として定義される．(本来の定義はザイフェルト行列を使ったまったく違ったものであるが，ここではコンウェイ多項式を使った便宜的な定義を採用する．)

また，一般に空間 M のホモロジー群はアーベル群になるが，アーベル群の基本定理により，これは，いくつかの無限巡回群と有限巡回群の直和 $\left(\bigoplus_{i=1}^{r} \boldsymbol{Z}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \boldsymbol{Z}/m_j\boldsymbol{Z}\right)$ に分かれる(m_j は素数冪)．そこで，素数 p に対し $d_p(M)$ を $r+$(m_j のうちの p 冪の数)と定義する．次の2つの式がリコリッシュとミレットによって示された．

$$P_K(\sqrt{-1},\sqrt{-1}) = \sqrt{-2}^{\,d_2(M_3(K))},$$
$$F_K(1,-1) = (-3)^{d_3(M_2(K))}$$

多項式不変量に特殊値を代入した値について，これ以外にもいくつか興味深い結果が知られている．しかし，いずれも単発的なもので，多項式不変量とは(位相幾何的に見て)いったい何者なのかという問いに対する答えからはほど遠い．(第1章の，アレクサンダー多項式の定義の明快さと比較されたい．) 結局，満足のいく解答は得られないまま，1980年代後半にはこういった研究は影を潜めることになる．だが，じつは，その時期にキリロフ(Kirillov)，レシェチヒン(Reshetikhin)，トゥラエフ(Turaev)らによって，多項式不変量とヤン-バクスター方程式や量子群との関係が次第に明らかになっていくのである．このあたりのことは，次章以降に解説していきたい．

2・4　平面グラフを使ったHOMFLY不変量の構成

ここでは，村上斉，大槻知忠，山田修司により発見されたHOMFLY多項式の別の構成法を解説する．そのためにまず平面上の3価グラフの不変量を考える．ただし，ここで考えるグラフは各辺に向きがついていて，各頂点において図7のようになっているものとする．

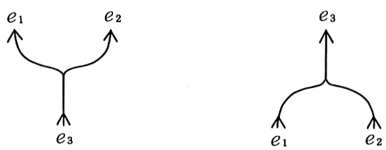


図7

また，自然数 $n \geqq 2$ を固定する．グラフ上の**フロー** f とは，各辺に対して1から n までの整数を，各頂点での入る数の和と出る数の和が等しいように与えるものとする(図7では $f(e_1)+f(e_2)=f(e_3)$)．次ページの図8はフローが与えられたグラフの例である．

さて，フロー付きの3価グラフ G に対し，(ここでは，定義は省略するが)

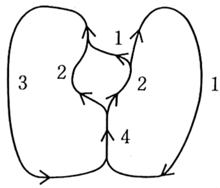
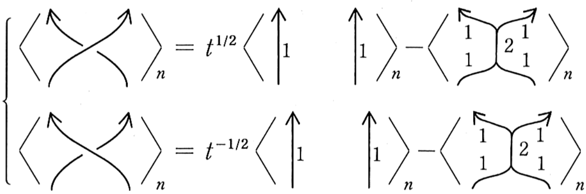


図 8

$t^{1/2}$ のローラン多項式 $\langle G\rangle_n$ を定義する．そして，絡み目の図 D に対して $\langle D\rangle_n$ を



(5)

で定義する．この式の意味は，各頂点で右辺を使ってフロー付きのグラフ(の和)に変形し，できたグラフの $\langle\ \ \rangle_n$ を計算したし合わせるということである．

こうしてできた $t^{1/2}$ のローラン多項式 $\langle D\rangle_n$ がライデマイスター移動 RII, RIII で不変であることが比較的容易に証明できる．そこで，RI での変化を考慮に入れて

$$P_n(D) = (t^{n/2})^{-w(D)}\langle D\rangle_n$$

と定義すると P_n は絡み目の不変量になる．さらに，P_n は

$$\begin{cases} t^{n/2}P_n(L_+) - t^{-n/2}P_n(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})P_n(L_0) \\ P_n(O) = (t^{n/2} - t^{-n/2})/(t^{1/2} - t^{-1/2}) \end{cases}$$

をみたし，$P_n(L) = P_L(t^{-n/2}, t^{1/2} - t^{-1/2}) \times (t^{n/2} - t^{-n/2})/(t^{1/2} - t^{-1/2})$ となることがわかる．このようにしても，HOMFLY 多項式の存在の証明が得られる．

この定義は，じつはリー環 $\mathfrak{sl}_n$ を量子化したものの表現論と密接に関係している．つまり，これは絡み目の量子 $SU(n)$ 不変量というべきものである．

同様の定義が量子 $Sp(n)$ 不変量についてもできることが矢木達也によって得られた．これは，前述のカウフマン多項式に対応している．ここで，$SU(n)$, $Sp(n)$ はそれぞれ特殊ユニタリー群，シンプレクティック群と呼ばれるリー群である．

また，$n=2$ のときはジョーンズ多項式を定義するのであるが，これを少し変形することによって，カウフマンによって得られた，ジョーンズ多項式の非常に簡単な構成(いわゆるカウフマン・ブラケット)を再現することができる((5)式の右辺の第二項の縦線はないものと思う)．このカウフマン・ブラケットを使うことによって，村杉邦夫とカウフマンは，結び目理論の100年近くの懸案であったテイト予想「図9のような部分を含まない，交代的な絡み目の図式は，絡み目の最小交叉数表示を与える」に肯定的な答を与えた．ここで，絡み目の図式が交代的であるとは，各閉曲線をたどっていくと上下の交叉が入れ代わり現れることをいう．

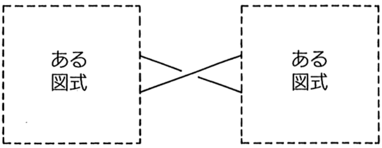


図 9

2・5　さまざまな結び目解消変形

さて，第1,2節の多項式不変量の定義において基本的だったのは，「交叉の上下の入れかえを何度かすると，どんな絡み目もほどける(自明なものになる)(図10)」と「交叉をなくすことを何度かおこなうと，どんな絡み目もほどける(図11)」という直感的には当たり前の事実であった．このように，何度か繰り返すことにより，どんな絡み目もほどくことができるような局所的な変形のことを，**絡み目解消変形**と呼ぶことにする．特に，どんな結び目もほどくことができるような局所的な変形のことを結び目解消変形と呼ぼう．この結び目解消変形は特に日本を中心に盛んに研究されている．

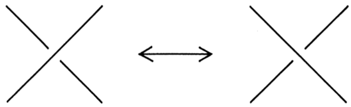


図 10

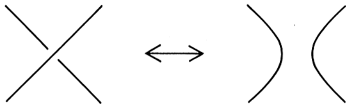


図 11

代表的な結び目解消変形をいくつかあげてみよう．興味のある読者は，これらを使って，実際に適当な結び目をほどいてみるとよい．驚くべきことに，次の図 12-16 のそれぞれの操作に対して，その操作だけを使って任意の結び目をほどくことができるのである．

まず，村上斉が定義した♯型変形(図 12)がある．これは，上記の 2 つの結び目解消変形以外では初めて定義されたものである．

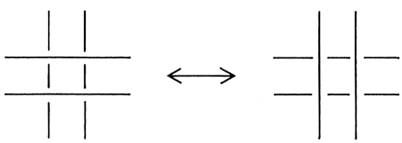


図 12

次に，図 11 の一般化として，ホステ，中西康剛，谷山公規によって H_n 変形(図 13)が導入された．この図で，弧の数が 2 本のときは，図 11 と同等の変形であることに注意しよう．

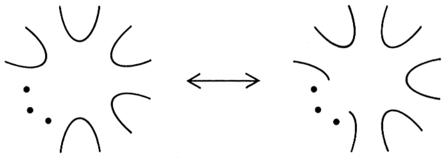


図 13

また，宮澤(当時会田)治子によって n 角形変形(図 14)が導入された．

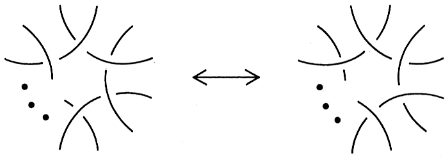


図 14

図 15 は大山淑之により導入された π/n 回転変形である．

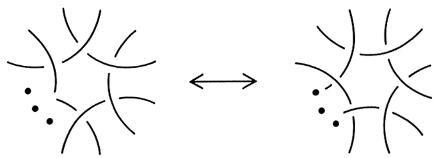


図 15

これは，図 16 で表された中西と村上斉による Δ 型変形の一般化である．

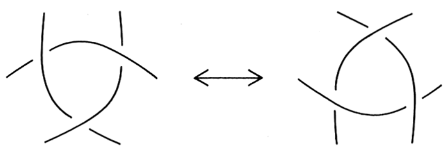


図 16

最後の Δ 型変形は，結び目に対して一度施すと，コンウェイ多項式の 2 次の係数が ±1 だけ変化するという著しい性質を持つことが，塩見(当時岡田)真枝によって示された．この結果は，コンウェイ多項式の各係数がバシリエフ不変量と考えられることや，後に葉広和夫によりクラスパー理論に拡張されたことなどを合わせると，画期的な発見であった．

これら結び目解消変形の研究が始まったころは，「与えられた結び目が何度の変形でほどけるか」というのが主な研究の対象であった．そのために，さまざまな不変量を使って評価式を作ってきた．つまり，結び目解消変形の研究に不変量を使っていたのである．しかし，1990 年代に入って，バシリエフ不変量という概念が導入されて，状況は変わりつつある．特に，前述の葉広のクラスパー理論は，不変量の研究に結び目の図式の局所的な変形を積極

的に使っている．彼の理論の下地には，日本における結び目解消変形のような「絵で見る数学」があったというのは，言い過ぎではないだろう．また，不変量は強ければ強いほどよいという 1980 年代後半に主流であった価値観に対して，結び目の局所的な変形(結び目解消変形ではないもの)を使うことによって結び目全体を粗く分類することにより，結び目の集合がどのようなものであるかを理解しようとする新しい研究の方向が現れた．(上述の結び目解消変形で分類すると，自明な結び目を含む類はただ一つになってしまうことに注意されたい．)

本章では多項式不変量にまつわる話をしてきたが，とくに本章後半の第 2.4, 2.5 節では日本人の仕事の解説が中心になった．不変量の研究の中でもこれらのトピックの発展は日本の研究グループの活躍によるところが大きい．

3章

バシリエフ不変量と空間グラフの不変量

本章は量子不変量の情報を含んでいるバシリエフ不変量，また，結び目の自然な拡張である空間グラフについての話である．空間グラフについては，不変量に関する話題を中心に，特にバシリエフ型不変量について述べる．

3・1 バシリエフ不変量

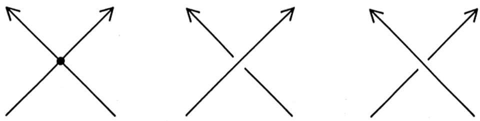
1990年に，バシリエフ(Vassiliev)は円周の$\boldsymbol{R}^3$への連続写像全体を考え，特異点集合の補集合のコホモロジーを計算することにより，結び目不変量の無限列を定義した．特異点理論から出発したものであるが，数年後バーマン(Birman)とリン(Lin)によって結び目の図式を用いて公理的定義がなされ，ある意味で量子不変量の情報を含んでいることが指摘された．以下バーマンとリンによる定義に基づいて説明していく．

有理数の集合$\boldsymbol{Q}$（一般にアーベル群)に値をとる結び目不変量vが与えられると，次の式で特異結び目の不変量に拡張される．

$$v(K_D) = v(K_+) - v(K_-).$$

ここで特異結び目とは，円周の$\boldsymbol{R}^3$へのはめ込みで，特異点は2重点のみのものである．また，K_D, K_+, K_-はその一部が図1で表されその他の部分は同

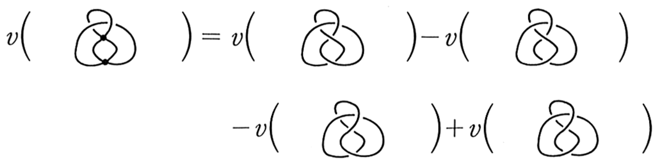
じであるような3つの特異結び目である．すなわち，上の式を再帰的に用いることにより与えられた結び目不変量 v を特異結び目の不変量に拡張する．



K_D　　K_+　　K_-

図1

たとえば，結び目不変量 v について



のようにして特異結び目に対する v の値を定める．

結び目不変量 v が $d+1$ 個の2重点をもつ任意の特異結び目 K^{d+1} について $v(K^{d+1})=0$ をみたすとき，v を次数 d の**バシリエフ不変量**であるという．とくに次数0のバシリエフ不変量はすべての結び目に対して同じ値をとる定数関数になることが定義よりわかる．つまり次数0のバシリエフ不変量 v について

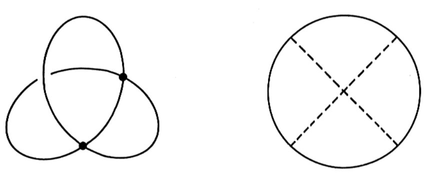


のように結び目の交点のいれかえで v の値がかわらないので，v はすべての結び目に対して同じ値をとることになる．さらに，次数があがるごとに

$$
\begin{array}{l}
\{\text{次数 } 0 \text{ のバシリエフ不変量}\} = \{\text{定数関数}\} \\
\qquad\qquad\qquad\cap \\
\{\text{次数 } 1 \text{ のバシリエフ不変量}\} \\
\qquad\qquad\qquad\cap \\
\{\text{次数 } 2 \text{ のバシリエフ不変量}\} \\
\qquad\qquad\qquad\cap \\
\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{array}
$$

のようにバシリエフ不変量の集合が階層構造をつくっていることがバシリエフ不変量の定義よりわかる．結び目不変量が，ある自然数 d について次数 d のバシリエフ不変量に等しくなるとき，その不変量は**有限型**であるという．一般に結び目の不変量は有限型とは限らないが，量子不変量の係数はすべて有限型になることが知られている(第5章参照)．

次数 d のバシリエフ不変量 v について d 個の2重点をもつ特異結び目 K^d に対する値 $v(K^d)$ を考えてみよう．このとき，特異結び目 K^d について辺の自己交差をゆるして変形してえられる特異結び目を $K^{d'}$ とするとき，$v(K^d) = v(K^{d'})$ となることがわかる．なぜなら，辺の自己交差がおこるときの v の値の変化は，辺の自己交差がおこる瞬間に現れる $d+1$ 個の2重点をもつ特異結び目に対する v の値で表されるが，次数 d のバシリエフ不変量の定義よりこれは0だから，である．よって与えられた v について $v(K^d)$ の値は K^d の2重点が円周上にならんでいる順序できまることになる．その順序をコード図で表す(図2参照)．



特異結び目　　　　コード図

図2

すなわち**コード図**とは円周上の点の対を点線(**コード**とよばれる)でむすんでできる図形で，特異結び目のひもを1周したときに2重点が現れた場所を円周上にマークし同じ2重点に対応するマークをコードでむすぶことにより，特異結び目からコード図をつくることができる．次数 d のバシリエフ不変量 v が与えられたとき，コード d 本のコード図 D に対応する特異結び目 v の値を $v(D)$ とかく．コード図 D に対応する特異結び目は一意ではないが前述のように D に対応するどの特異結び目をとったとしても $v(D)$ の値は同じである．

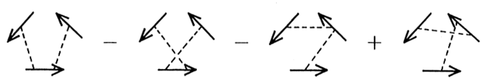
コード図の $\boldsymbol{Q}$ 係数の1次結合の全体がつくるベクトル空間に枠付け独立

枠付け独立関係式

 ＝ 0

コード図の実線のある場所に独立したコードがある

4項関係式



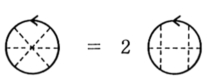
＝ 0

コード図の実線の3か所に注目している．残りの部分は4つとも等しい．

4項関係式の適用例

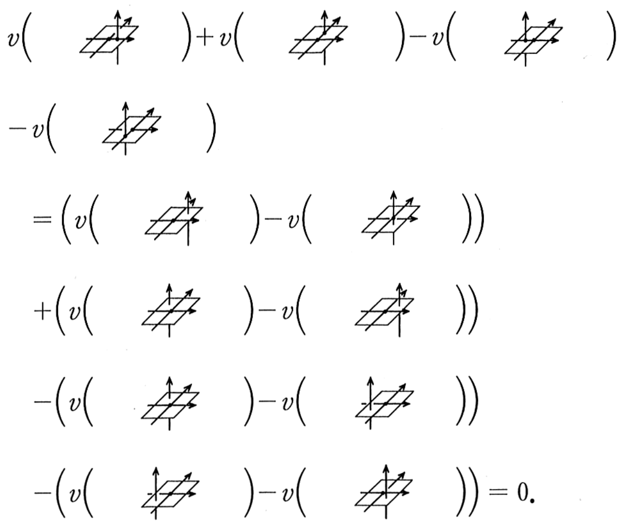
 ＝ 0

枠付け独立関係式より第3項は0となり，第1項と第4項は円周の同相写像で移り合うので



が得られる．

関係式と 4 項関係式をいれたものを $\mathscr{A}(S^1)$ とかき，コード d 本のコード図がはる $\mathscr{A}(S^1)$ の部分ベクトル空間を $\mathscr{A}(S^1)^{(d)}$ とかく．次数 d のバシリエフ不変量 v について，コード d 本のコード図に上で定義された $v(D)$ を対応させることにより線型写像 $\mathscr{A}(S^1)^{(d)} \to \boldsymbol{Q}$ が定義されるが，これをバシリエフ不変量 v の**重み系**とよぶ．この定義が成立するためには 4 項関係式の両辺が重み系で等しい値にうつっていなくてはならないが，それは次のように示される．



与えられた初期値について(とくに高い次数の)バシリエフ不変量を具体的に構成する計算はたいへん煩雑になる．また，次数 d のバシリエフ不変量がつくるベクトル空間の次元の計算はコード図の空間 $\mathscr{A}(S^1)^{(d)}$ の次元を求めることに帰着されるが，$\mathscr{A}(S^1)^{(d)}$ の次元の具体的な計算も次数が高くなるほど煩雑になり，その具体的な値は現時点では次数 12 までについてしか知られていない．(ちなみに $\mathscr{A}(S^1)^{(12)}$ の次元は 232 である．) 一方，$\mathscr{A}(S^1)$ の代数的な構造はバーナタン(Bar-Natan) [3] 等によってかなり詳しく調べられている．たとえば，コード図がウェブ図(第 9 章参照)に拡張され空間 $\mathscr{A}(S^1)$ にホップ代数の構造がはいることが知られている．

絡み目に対しても結び目の場合と同様にしてバシリエフ不変量を定義することができるが，各次数のバシリエフ不変量がつくるベクトル空間の次元や基底を具体的にえるためにはより複雑な計算が必要になる．次数2については村上斉によって，次数3については金信泰造，宮澤康行，谷亜輝江によって絡み目のバシリエフ不変量の具体的な表示が詳しくしらべられている．

以上見てきたように，バシリエフ不変量はすべての量子不変量をある意味で含むような結び目不変量として莫大な情報をもつものであり，結び目理論において強力な分類能力をもつことが期待される．そこで「バシリエフ不変量はすべての結び目を区別するか？」という問題が考えられる．この問題はバシリエフ不変量が出現した当初からの予想であり，現在も未解決のままである．しかし，「任意に結び目 K と自然数 d を与えると，次数 d のバシリエフ不変量がすべて K と一致する結び目が無限個存在する」という結果がある．これは大山淑之，スタンフォード(Stanford)，リンによって独立に証明された定理であり，予想の否定的方向や難しさを示すとともに結び目のおもしろさを語る結果であると思われる．図3は大山淑之による，次数が $d-1$ のバシリエフ不変量が自明な結び目と同じになる結び目の例である．

図3の図式には $\{A_1, A_2, \cdots, A_d\}$ という交差点の集合の族が存在し，任意の空でないような部分族の交差点で交差交換をおこなうと図3の結び目は自明な結び目になってしまう．このような性質を持つ結び目は次数 $d-1$ のバ

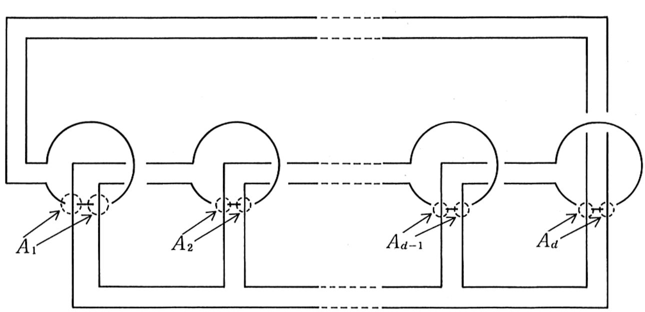


図3

シリエフ不変量の値が自明な結び目と同じになってしまうのである．この結果は結び目図式の観点からの研究の1つであるが，最近，葉広和夫がクラスパー理論によって，「ある局所変形で2つの結び目が移りあうこと」が「次数 $d-1$ のバシリエフ不変量が一致する」ための必要十分条件であることを示した．すなわち，ある局所変形で移りあうという同値関係による結び目の分類がバシリエフ不変量の階層に1対1に対応することがわかったのである．次数 d のバシリエフ不変量が一致する十分条件は前述のようにスタンフォードや大山淑之等によって，必要十分条件はグサロフ(Goussarov)によって与えられていたが，それらを含む理想的な形を葉広和夫は示したのである．バシリエフ不変量は広大な研究対象であるが，現在その正体がわずかではあるが次第に解明されつつある．

3・2 空間グラフ

この節では空間グラフのある問題について述べる．グラフを頂点と辺からなる図形とみなし(序章参照)，あるグラフ G の $\boldsymbol{R}^3$ への埋め込みの像を**空間グラフ**とよぶ．結び目は円周の埋め込みなので，グラフの埋め込みである空間グラフは結び目の自然な拡張と考えられる．結び目の場合と同様に，2つの空間グラフが自己交叉のないように連続変形して互いにうつりあうときそれらを**イソトピック**であるという．また結び目図式と同様に空間グラフの $\boldsymbol{R}^2$ への射影の像を**図式**とよぶ．空間グラフにおいても，結び目のライデマイスターの定理に対応する次の定理が成立する．

空間グラフのライデマイスターの定理 「2つの空間グラフの図式がイソトピックな空間グラフを表すこと」と,「一方の空間グラフの図式に図4のようなライデマイスター移動IからVを繰り返し施すことにより他方の図式が得られること」は同値である．

グラフ G がその部分グラフとしてサイクル，すなわち円周を持つとき，G

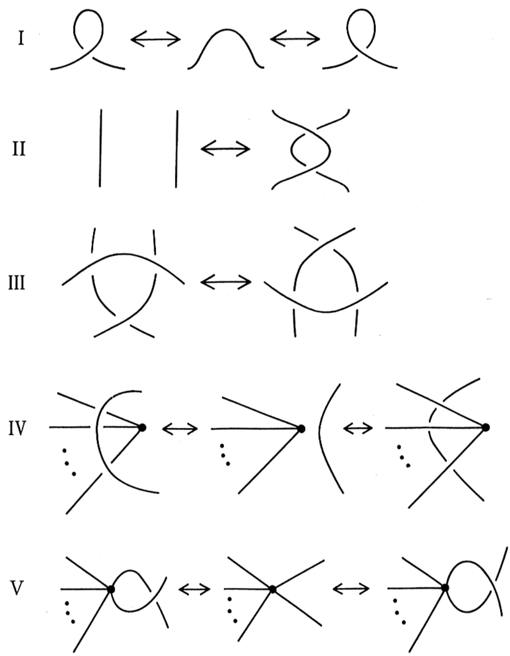


図 4

を $\boldsymbol{R}^3$ にうめこんでできる空間グラフを考えると，G のサイクルはその部分-空間グラフとして結び目をつくっている．このとき，グラフ G がある程度複雑であると G のどんな空間グラフにおいても，自明でない結び目を部分グラフとして含むことがわかる．コンウェイとゴードン(Gordon)は 7 頂点完全グラフ K_7 (7 つの頂点をもちすべての異なる頂点が辺で結ばれているグラフ)においてこの現象があらわれることを示した．以下その手法を概説する．

K_7 のある空間グラフを $\tilde{K_7}$ とする．K_7 のハミルトンサイクル C，すなわちすべての頂点を通るサイクルを考え，これに対応する $\tilde{K_7}$ の部分-空間グラフとしての結び目を $\tilde{C}$ とする．そのコンウェイ多項式の 2 次の係数を $\alpha(\tilde{C})$ とおき，K_7 のハミルトンサイクルすべてにわたって $\alpha(\tilde{C})$ の総和をと

り，これを $\alpha(\tilde{K}_7)$ であらわすことにする．$\alpha(\tilde{K}_7)$ は整数値をとり，ライデマイスター移動により不変であるので，空間グラフの不変量となる．さらに，$\alpha(\tilde{K}_7) \pmod 2$ は空間グラフ $\tilde{K}_7$ の交点のいれかえで不変になる．すなわち，$\alpha(\tilde{K}_7) \pmod 2$ は K_7 の任意の空間グラフ $\tilde{K}_7$ で一定値になる．一方，K_7 の空間グラフで，1つのハミルトンサイクルが3つ葉結び目で残りのすべてが自明な結び目になるものを具体的につくることができる．このとき，$\alpha(\tilde{K}_7) = 1$．したがって，$\alpha(\tilde{K}_7)$ はつねに奇数となる．もしすべてのハミルトンサイクルが自明な結び目ならば $\alpha(\tilde{K}_7) = 0$ となるので，K_7 の任意の空間グラフは自明でない結び目を部分グラフとして含むことになる．コンウェイとゴードンは絡み数を用い，同様な手法で K_6 の空間グラフはつねに自明でない絡み目を含むことも示している．

空間グラフの典型的な問題として，また次節との関係から上の例を挙げたのであるが，その議論では結び目不変量から空間グラフの不変量を作り出すことがポイントになっている．空間グラフすなわちグラフの埋め込みが結び目レベルで制限がつくという現象に対して，逆にある程度簡単なグラフであると結び目レベルでは埋め込みに制限がつかない現象もあらわれる．つまり，グラフの各サイクルに任意の結び目を指定したとき，部分-空間グラフとしての各サイクルがその結び目とイソトピックになっているような埋め込みが存在してしまうグラフもある(このようなグラフは**順応性**を持っていると言われる)．2頂点を n 本の辺で結ぶ θ_n 曲線が，この性質をもつグラフであることが樹下眞一によって発見されて以来，さまざまなグラフに対して研究が進められている．その他，空間グラフの多項式不変量である山田修司による山田多項式等多くの話題があるが，特に谷山公規の研究が空間グラフの理論を大いに発展させた．彼は根本的に同値関係から見直し，新たに7つの同値関係を導入したのである．さらに，各同値関係において空間グラフとその同値関係の不変量の関係を詳しく研究し，安原晃らとともに前述の埋め込み自体の問題に応用する等の結果を導いたのである．詳しい説明は，他の空間グラフの話題とともに参考文献［小林］等を参照していただきたい．

3・3　空間グラフのバシリエフ型不変量

空間グラフにおいても不変量が重要な役割を果たすことを前節で述べた．バシリエフ不変量が結び目不変量の多くの情報を含むのであるから，空間グラフにうまく拡張すれば多くの成果が得られるはずである．第3•1節の結び目のバシリエフ不変量の定義において，結び目を空間グラフにおきかえると空間グラフのバシリエフ型不変量を定義することができる．定義にあたって2重点を含む特異空間グラフを考えることになるが，バシリエフ型不変量を具体的に計算するときには，その2重点ともともとの空間グラフの頂点を混同しないように注意しなければならない．実際に空間グラフのバシリエフ型不変量についてコード図に相当するものを定式化しようとすると，頂点の存在が影響し4項関係式の他にも関係式があらわれ計算を複雑にする．金信泰造により θ_3 曲線の次数3までの結果があるが，複雑な計算を要している．各々のグラフにおけるバシリエフ型不変量を完全に決定することは不可能に近いとおもわれるが，特別なグラフを除きバシリエフ型不変量は存在し，かつそれを空間グラフの他の問題に適応することができる．以下は，大山淑之と谷山公規の共同研究の概略である．

グラフ G のある空間グラフを $\tilde{G}$ とし，また，グラフ G の部分グラフ全体を $S(G)$ で表す．G の部分グラフ $H \in S(G)$ に対応する $\tilde{G}$ の部分－空間グラフを $\tilde{H}$ とかくことにする．G の各部分グラフの埋め込みとしてえられる空間グラフ全体に対して定義された次数 d のバシリエフ型不変量を v とし，ω を $S(G)$ から v と同じ値域への写像とする．このとき G の空間グラフの不変量 $\tilde{v}$ を

$$\tilde{v}(\tilde{G}) = \sum_{H \in S(G)} \omega(H) v(\tilde{H})$$

で定める．すなわち，部分－空間グラフに対するバシリエフ型不変量 v の値の重みつき和をとることにより新たな空間グラフの不変量 $\tilde{v}$ が構成されたことになるが，このとき $\tilde{v}$ も次数 d のバシリエフ型不変量になることがわかる．この構成法において ω として G のサイクル以外の部分グラフに対し

ては0を与えるような写像をとってきたときは，vとして結び目のバシリエフ不変量をとってくれば十分である．例としてGが完全グラフK_7のとき，ωの値をK_7のハミルトンサイクルに対しては1，K_7のその他の部分グラフに対しては0と定め，vとして結び目のコンウェイ多項式の2次の係数をとってくると，$\tilde{v}$として前節の$\alpha(\tilde{K_7})$がえられる．

前節の不変量αはK_7の任意の空間グラフが自明でない結び目を部分－空間グラフとして含むことを示したが，Gとして他の具体的なグラフをとって写像ωをうまく定めると，上のように構成された不変量$\tilde{v}$を用いてGの空間グラフに関する結果を導くことができる．たとえばこの手法により図5のグラフは任意のサイクルに勝手に与えた結び目を実現するような埋め込みが存在しない，すなわち順応性を持ってはいないということがわかる．図5のグラフは平面的なグラフの中で順応性を持たないことが最初に判明した例である．

図5のグラフは5角形の辺をすべて2重にしてできるグラフである．同様にn角形の辺をすべて2重にしたグラフをつくり，その空間グラフを考える．ジョーンズ多項式のn回微分に1を代入して得られる結び目のバシリエフ不変量vについて上記の手法を適用すると，図6のような空間グラフは同じ頂点に接続する2辺で交差交換をおこなうと，平面へ埋め込んだものにイソトピックになるが，同じ辺上でどのように交差交換をおこなっても平面に埋め込めないことがわかる．これは，谷山公規が新たに導入した同値関係

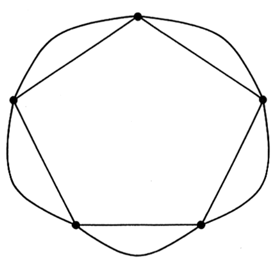


図5

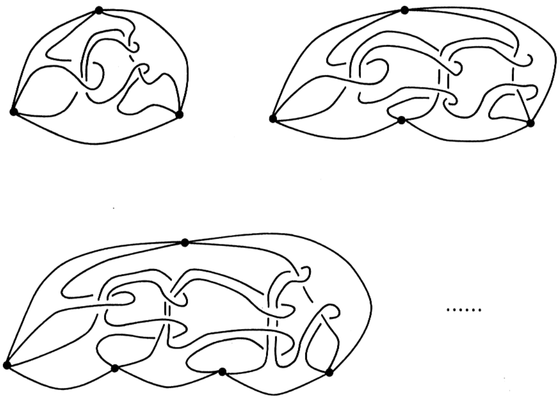


図 6

に関する例である．

本章はバシリエフ不変量とその空間グラフへの応用についての話であった．特にバシリエフ不変量については，バーナタンのホームページ [7] の論文リストによると 200 以上の論文が世界中ですでに書かれている．バーマンとリンの論文が 1993 年に出たことを考えると，驚くべき数である．バシリエフ不変量は，量子不変量を共通の性質でまとめたものでもあるから，当然，解明すべき点が多々あり，1つ1つがかなり難しい．しかし，やりがいのある興味深い研究対象であることは間違いない．

4章

結び目不変量と統計物理学

第4章では，結び目の不変量に関連して，統計物理学という異なった観点からのお話をしたい．

ニュートン力学と微積分など，物理の理論の発展には新しい数学がしばしば重要な役割を果たしてきた．その一方で20世紀初頭の頃から，数学と物理学の学問としての違いが明確に認識されるようになった．現在，数学は公理に基づいて論理的に構築される．しかし，物理学には公理は存在しない．物理学の理論は実験で検証された場合にのみ正しいと認められる．

このように数学と物理学はその視点が大きく異なっている．それにもかかわらず，理論物理学の研究の中から数学でも興味の対象となるような事柄が最近いくつも出現した．たとえば，共形場理論，可解格子模型，量子群などに関してそのように言っても良いであろう．本章は最近の数学と物理学の交流を示す例として，量子スピン系の可解模型がどのように組みひも群と関係するのかを解説する．砕いて言えば，磁石も結び目と関係するのである．

4・1　磁石の模型としての量子スピン系

子供の頃に砂場で磁石を使って砂鉄集めをして遊んだ経験はないだろうか．磁石にはＳ極とＮ極があり，互いに引き合ったり反発したりする．量子力

学では，磁石の原因は電子のスピンであると考えられる．電子は大きさがなく，理想的な質点である．しかし，量子力学的「角運動量」を持つ．これをスピン角運動量という．さらに，ある軸の周りの電子のスピン角運動量は，$\hbar$ を単位にして $\pm 1/2$ の値しかとらない．これを，電子のスピンの大きさは $1/2$ である，と言う．ここで h をプランク定数として，$\hbar = h/2\pi$ である．簡単のため，以後は $\hbar = 1$ となる単位系でスピン角運動量を議論する．

量子力学では，物理量はすべて演算子(線形写像)に対応し，その物理量の取り得る値の集合は，その線型写像の固有値の集合である．一般に，スピン角運動量演算子はリー環 $\mathfrak{su}_2$ の生成子(基底)の表現である．特に，電子のスピン角運動量演算子は，$\mathfrak{su}_2$ のスピン 1/2 表現(ベクトル表現)で与えられる．

ここでリー環 $\mathfrak{su}_2$ とは

$$\mathfrak{su}_2 = \{2\times 2 \text{ の複素行列 } A \mid A^\star = -A \text{ かつ } A \text{ の対角和は } 0\}$$

にブラケット積を $[X, Y] = XY - YX$ で定めてできるリー環である．ただし $A^\star$ は A の転置の複素共役を表す．$\mathfrak{su}_2$ はリー群

$$SU(2) = \{2\times 2 \text{ の複素行列 } A \mid A^\star = A^{-1} \text{ かつ } A \text{ の行列式は } 1\}$$

の(単位元における接空間としての)リー環である．基底で表示すると，リー環 $\mathfrak{su}_2$ とは基底

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

ただし i は複素単位 $\sqrt{-1}$

ではられる3次元実ベクトル空間に

$$[X, Y] = -2Z, \quad [Y, Z] = -2X, \quad [Z, X] = -2Y.$$

でブラケット積を定めたものである．さらに，リー環 $\mathfrak{su}_2$ の複素係数の包絡環 $U(\mathfrak{su}_2)$ とは X, Y, Z で生成される $\boldsymbol{C}$ 上の環に

$$XY - YX = -2Z, \quad YZ - ZY = -2X,$$
$$ZX - XZ = -2Y$$

で関係式をいれたものである(包絡環については序章を参照)．$U(\mathfrak{su}_2)$ においてその生成元を

$$S^X = \frac{1}{2i}X, \qquad S^Y = \frac{1}{2i}Y, \qquad S^Z = \frac{1}{2i}Z,$$

でとりかえ，これらの3つ組を $\vec{S} = (S^X, S^Y, S^Z)$ と表し，これを**スピン演算子**とよぶ．

ベクトル空間 $V = \boldsymbol{C}^2$ に対して，$\mathfrak{su}_2$ のスピン 1/2 表現(ベクトル表現)

$$\rho : \mathfrak{su}_2 \to \mathrm{End}(V)$$

を具体的に作ってみよう．ここで $\mathrm{End}(V)$ は，V の自己準同型写像の全体である．まず，パウリ行列と呼ばれる3つの2行2列の行列 $\sigma^X, \sigma^Y, \sigma^Z$ を導入する．

$$\sigma^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これらを用いて $\mathfrak{su}_2$ の生成子のスピン 1/2 表現は

$$\rho(\vec{S}) = (\rho(S^X), \rho(S^Y), \rho(S^Z)) = \left(\frac{1}{2}\sigma^X, \frac{1}{2}\sigma^Y, \frac{1}{2}\sigma^Z\right) \qquad (1)$$

と与えられる．この ρ が実際にリー環 $\mathfrak{su}_2$ の表現を与えていることは，直接計算して容易に確認できる．ここまでで重要なことは，電子スピン角運動量演算子という力学的変数は，$\mathfrak{su}_2$ のスピン 1/2 表現 $\rho(\vec{S})$ で与えられるということである．

量子力学では，ある物理量に対する演算子の固有値の全体集合がその物理量の可能な観測値全体の集合である．(1)式で与えられた $\mathfrak{su}_2$ の表現では，演算子 S^Z の表現 $\rho(S^Z)$ が対角行列でありその固有値は $\pm 1/2$ である．そこで，z 軸の周りのスピン角運動量の値は($\hbar$ を単位として) $\pm 1/2$ であることが読み取れる．以後簡単のため，$\rho(\vec{S})$ を $\vec{S}$ と略記する．

磁石の起源を説明するために，電子スピンの集団的振る舞いを調べたい．磁石の中の電子スピンが相互作用のために同じ方向に向きをそろえ，巨視的な磁化が生じると考えられているからである．

固体中の電子のスピンの相互作用を記述する理論模型を具体的に導入しよう．簡単のため一次元の系を考える．L 個の原子が一列に並んだ1次元格子を考える．格子点の上には一個ずつの電子が存在する．このとき，テンソ

ル積の空間

$$V^{\otimes L} = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{L}$$

を考えよう．電子のスピン演算子をテンソル積 $V^{\otimes L}$ での線型変換で表す．j 番目の原子の上にいる電子のスピン演算子は

$$\vec{S}_j = \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{j-1} \otimes \vec{S} \otimes \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{L-j}$$

と表される．この id_V は恒等変換を表わし，行列で表示すれば単位行列となる．ここでさらに周期的境界条件を課す．これは，1番目の原子と L 番目の原子が隣り合わせになっているという条件である．1次元系に周期的境界条件を課すと，原子は環状に並んでいることになる．そして $L+1$ 番目の原子は1番目の原子に対応するので，$\vec{S}_{L+1}$ は $\vec{S}_1$ を意味すると解釈する．

ハイゼンベルク(Heizenberg)は隣り合うスピン $\vec{S}_1$ と $\vec{S}_2$ の相互作用エネルギーは，

$$-J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = -J(S_1^X S_2^X + S_1^Y S_2^Y + S_1^Z S_2^Z)$$

の固有値であることを示した．J は定数で，交換積分とも呼ばれる．さらに電子はたいてい，原子のある位置に局在しているので，隣り合わない原子の上の2電子のスピンは相互作用をしないと近似できる．こうして，1次元の量子力学的スピン系は次のハミルトニアン演算子 $\mathcal{H}_{XXX}$ で記述される．

$$\mathcal{H}_{XXX} = -J\sum_{j=1}^{L} \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} = -J(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \cdots + \vec{S}_L \cdot \vec{S}_1)$$

ここで再度周期的境界条件 $\vec{S}_{L+1} = \vec{S}_1$ に注意する．この模型を(等方的)ハイゼンベルク模型あるいはXXX模型とよぶ．

一次元ハイゼンベルク模型を以下のように拡張した模型を，XYZ模型とよぶ．

$$\mathcal{H}_{XYZ} = -\sum_{j=1}^{L} \{J_X S_j^X S_{j+1}^X + J_Y S_j^Y S_{j+1}^Y Y + J_Z S_j^Z S_{j+1}^Z\}$$

$J_X = J_Y = J_Z = J$ のときXXX模型，$J_X = J_Y = J \neq J_Z$ のときXXZ模型

とよぶ．以後 XXZ 模型を考え，$\Delta = J_Z/J_X$ とする．(XYZ 模型と XXZ 模型も可解格子模型である．)

4・2 転送行列

XXZ 模型に対する転送行列を導入する．まず，1 番から L 番の電子のスピンに加えて，0 番目の空間を導入する．そして，テンソル積 $V^{\otimes(L+1)}$ を考える．$V^{\otimes(L+1)}$ 上の線型変換 $X_j(u)$，P_{L+1} を以下のように導入する．

$$X_j(u) = \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{j} \otimes X(u) \otimes \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{L-j-1}$$

$$\in \mathrm{End}(V \otimes (\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{L}))$$

ただし $j = 0, \cdots, L-1$

ここで 4 行 4 列の行列 $X(u)$ は以下のように定義される．

$$X(u) = \begin{pmatrix} \sinh(\lambda - u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-u}\sinh\lambda & \sinh u & 0 \\ 0 & \sinh u & e^{u}\sinh\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(\lambda - u) \end{pmatrix}$$

ここで，変数 u はスペクトルパラメータとよばれ，XXZ 模型において直接の物理的意味はないが，後で見るように理論上重要である．さらに，λ は異方性パラメータ Δ ($\Delta = J_z/J_x$) と関係し，$\Delta = -\cosh\lambda$ である．そして置換演算子 P_{L+1} は

$$P_{L+1}(v_0 \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_L) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_L \otimes v_0$$

ただし $v_0 \otimes \cdots \otimes v_L \in \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{L+1}$

によりその作用を定義する．このとき，

$$T(u) = \mathrm{tr}_0(X_0(u) X_1(u) \cdots X_{L-1}(u) P_{L+1})$$

によって定められる T を，XXZ 模型に対する**転送行列**とよぶ[1, 2]．ここで記号 tr_0 は，0 番目のベクトル空間 V に関するトレースを意味するものとする．

転送行列には非常に顕著な性質がある．まず，転送行列の log 微分から XXZ 模型のハミルトニアンが導かれる[1, 2]．

$$\frac{d}{du}\log T(u)|_{u=0} = \frac{1}{T(0)}\frac{d}{du}T(u)|_{u=0} = \sum_{j=1}^{L-1}\frac{d}{du}X_j(0)$$
$$= \mathcal{H}_{XXZ}$$

さて，次のような関係式を考える．

$$X_j(u)X_{j+1}(u+v)X_j(v) = X_{j+1}(v)X_j(u+v)X_{j+1}(u)$$
$$j = 0, \cdots, L-1$$

これを**ヤン-バクスター方程式**という．線型変換 $X_j(u)$ がヤン-バクスター方程式を満たすとき，異なるスペクトルパラメータ u と v に対する転送行列 $T(u)$ と $T(v)$ は交換する．つまり，このヤン-バクスター方程式が成り立つとき，

$$[T(u), T(v)] = 0 \qquad \text{ただし } u, v \in \boldsymbol{C} \tag{2}$$

が成立することが示される[1, 2]．転送行列の交換条件(2)は，無限個の転送行列が同時に対角化可能であることを意味する．これは著しい性質である．転送行列をスペクトルパラメータに関して展開しよう．

$$T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n$$

すると転送行列の交換条件(2)から，C_n 達が互いに交換することが導かれる．

$$[C_n, C_m] = 0, \qquad \text{ただし } n, m \in \boldsymbol{N}$$

これは，互いに交換する保存量が非常に多数存在することを示唆する．これらのことから，ヤン-バクスター方程式が成立する格子模型を可解格子模型とよぶ．

4・3　ヤン-バクスター方程式と組みひも群の表現

第1章で，組みひも群の表示が与えられた．n 次の組みひも群 B_n の生成元を $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ とするとその定義関係式は

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad (|i-j| \geqq 2)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$$

この関係式はヤン-バクスター方程式と非常によく似ている．もしもヤン-バクスター方程式において $X_j(u)$ がその引数に依存しないような場合，行列 $X_j(u)$ は組みひも群の表現となる．たとえばスペクトルパラメータの極限をとることによって，それが実現することがある．実際，XXZ 模型において導入された $X_j(u)$ に対して，以下のようにして組みひも群の表現が導かれる．

$$\begin{aligned} G_j &= \lim_{u\to\infty} X_{j-1}(u)/\sinh(\lambda-u) \\ &= \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{j-1} \otimes G \otimes \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{L-j} \\ & j = 1, \cdots, L \end{aligned}$$

ここで $t = \exp\lambda$ とおくと行列 G は以下のように表される．

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -t & 1-t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき $\sigma_j \mapsto t\,G_j$ $(j = 1, \cdots, n-1)$ によって表現 $B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を定めると，これは第1章で与えられた組みひも群の表現と一致することが分かる($L = n-1$ とおいた)．こうして量子スピン系の転送行列から，組みひも群の表現が導かれた．ポイントは，ヤン-バクスター方程式であった．実際，ヤン-バクスター方程式の解から多数の組みひも群の表現が導かれている[3, 4]．これらの表現のトレースをとることにより結び目の多項式不変量が定義されている．

4・4 テンパリー-リーブ代数

前節で導かれた組みひも群 B_n の表現はいくつもの興味深い性質を持っている．テンソル積 $V^{\otimes n}$ 上の恒等変換

$$I = \overbrace{\mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_V}^{n}$$

を用いて前節で導かれた組みひも群の表現をつぎのように分解する．

$$G_j = I - t\,U_j \qquad j = 1, \cdots, n-1$$

すると U_j は以下の関係式を満たす．

$$\begin{aligned} U_j U_{j\pm1} U_j &= U_j \\ U_i U_j &= U_j U_i \qquad |i-j| \geqq 2 \\ U_j^2 &= Q U_j \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $Q = t + t^{-1}$ である．これらの関係式で定義される代数を，**テンパリー-リーブ代数**とよぶ．

興味深いことに，テンパリー-リーブ代数の表現が存在するとき，U_j から逆に G_j を定義すると，それは組みひも群の表現を導く．このことは以下の計算で確認できる．

$$\begin{aligned} G_j G_{j+1} G_j &= (I - tU_j)(I - tU_{j+1})(I - tU_j) \\ &= I - t(2U_j + U_{j+1}) + t^2(U_j U_{j+1} + U_{j+1} U_j + U_j^2) \\ &\quad - t^3 U_j U_{j+1} U_j \\ &= I - t(U_j + U_{j+1}) + t^2(U_j U_{j+1} + U_{j+1} U_j) \end{aligned}$$

最後の等号で関係式(3)を用いた．同様にして，

$$G_{j+1} G_j G_{j+1} = I - t(U_j + U_{j+1}) + t^2(U_j U_{j+1} + U_{j+1} U_j)$$

が示され，$G_j G_{j+1} G_j = G_{j+1} G_j G_{j+1}$ が導かれる．

関係式(3)は，1970年代にテンパリー(Temperley)とリーブ(Lieb)により2次元格子模型の研究の際に最初に見つけられた．その後80年代前半にジョーンズが作用素環の研究の中で独立に見出し，ジョーンズ多項式を発見する重要なきっかけとなった．

4・5　結び目不変量の数値シミュレーションへの応用

前節まで，物理学に登場する理論模型がどのように結び目と関係するか，説明した．しかし，結び目と物理学の関係はそれだけではない．結び目不変

量は統計物理学における数値シミュレーションに応用できるのである．

交差点数が x 個の結び目図式に対して，ジョーンズ多項式を直接計算すると，x に関してだいたい指数関数的な計算時間がかかってしまう．ところが，量子群の R 行列を用いて，次数 d のバシリエフ不変量を多項式時間 x^d で計算するアルゴリズムを作ることができる([7] 参照)．直観的に説明すると，量子群の R 行列は，4•4 節で議論した組みひも群の表現行列 G に対応する行列である．そして量子群とは，リー代数の包絡環のある種の変形版で，量子群の立場からヤン-バクスター方程式の解をきちんと導くことができるのである(第5章を参照のこと)．

結び目不変量を数値シミュレーションに応用して，高分子の絡み合い効果など従来の研究方法では手のつけられなかった問題をきちんと調べることができる．いろいろな不変量を試した結果，バシリエフ不変量が数値シミュレーションの観点でも非常に有用であることが分かった．たとえば，環状高分子溶液の浸透圧の実験的測定値を，バシリエフ不変量を用いた数値シミュレーションの結果から非常によく説明することができる([7] 参照)．輪形の高分子の集合が互いに絡み合う効果が，現実の物質の性質に深く関係することが明らかになったのである．統計物理学の立場からも結び目不変量としての，バシリエフ不変量の重要性は瞠目に値すると思われる．

5章

コンツェビッチ不変量

これまで，いろいろな結び目の不変量が登場し，また，これらの不変量が統計物理などとも結びついていることが紹介された．1980年代なかばに結び目のジョーンズ多項式が発見されてからというもの，数多くの不変量が構成され，これらについて，結び目理論だけでなく，表現論と呼ばれる立場や，物理的立場から，さまざまな研究がなされてきたのである．

ここでは，これらの不変量の多くが，じつは，コンツェビッチ不変量（文献 [3], [12]）と呼ばれるもので統一的に捉えられる，ということを紹介したい．

5・1　量子不変量

リー環 $\mathfrak{g}$ のベクトル空間 V_1, V_2 上の表現 ρ_1, ρ_2 があったとする（表現については序章を参照）．すなわち $\rho_i : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V_i)$．ここで $\mathrm{End}(V_i)$ は V_i から V_i への線型写像の全体を表す．このときテンソル積 $V_1 \otimes V_2$ 上の $\mathfrak{g}$ の表現 ρ が

$$\rho(X)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X)v_2$$
$$\text{ただし } X \in \mathfrak{g}, \quad v_i \in V_i$$

で定義される．この表現を ρ_1 と ρ_2 の**テンソル表現**とよび $\rho_1 \otimes \rho_2$ とかく．

今の場合 $V_1 \otimes V_2$ 上の表現と $V_2 \otimes V_1$ 上のテンソル表現は，V_1 と V_2 の成分のいれかえで自然に対応していることに注意しよう．すなわち，成分をいれかえる線型写像 P：$V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ を $P(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$ で定めるとき，次の図式

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{(\rho_1 \otimes \rho_2)(X)} & V_1 \otimes V_2 \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ V_2 \otimes V_1 & \xrightarrow[(\rho_2 \otimes \rho_1)(X)]{} & V_2 \otimes V_1 \end{array} \qquad \text{ただし } X \in \mathfrak{g}$$

は自然に可換になる(すなわち，この図式の左上から右下へいく合成写像は経路のとり方によらず互いに等しくなる)ことがテンソル表現の定義よりわかる．

一般にリー環 $\mathfrak{g}$ のベクトル空間 W_1, W_2 上の表現 ϕ_1, ϕ_2 があったとき，図式

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\phi_1(X)} & W_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ W_2 & \xrightarrow[\phi_2(X)]{} & W_2 \end{array} \qquad \text{ただし } X \in \mathfrak{g}$$

が可換になるような線型写像 f：$W_1 \to W_2$ のことを $\mathfrak{g}$ 作用に関する**インターｰトワイナー**とよぶ．リー環のテンソル表現については，成分いれかえ写像 P：$V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ がインターｰトワイナーである，ということになる．

さてリー環 $\mathfrak{g}$ の V_1, V_2 上の表現 ρ_1, ρ_2 があったとき，これらは自然に $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の表現に拡張し，さらにそれらを複素パラメータ q で変形することにより量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現がえられる(序章参照)．それらの表現も同じ記号 ρ_i, V_i で表すことにする．すなわち ρ_i：$U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V_i)$．古典極限 $q \to 1$ において成分いれかえ写像 P：$V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ が $\mathfrak{g}$ 作用に関する(したがって，$U(\mathfrak{g})$ 作用に関しても)インターｰトワイナーになっているが，このインターｰトワイナーをパラメータ q で変形することにより $U_q(\mathfrak{g})$ 作用に関するインターｰトワイナー

$$R_{V_1,V_2} : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$$

がえられる．この線型写像 R_{V_1,V_2} は行列で表示すると各成分にパラメータ q を含んでいる複素行列(実際には $q^{\pm 1}$ の多項式を成分にする行列)で古典極限 $q \to 1$ では成分いれかえ写像 P に等しくなるような写像である．ここでの重要なポイントは $q \neq 1$ では R_{V_1,V_2} は成分いれかえ写像とは異なる写像であるということである．

この R_{V_1,V_2} はヤン-バクスター方程式(第 4 章参照)をみたすことが次のようにしてわかる．量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の V_1, V_2, V_3 上の表現があったときインターートワイナー

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{R_{V_1 \otimes V_2, V_3}} V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2)$$

とインターートワイナーの合成

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \xrightarrow{\mathrm{id}_{V_1} \otimes R_{V_2,V_3}} V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \xrightarrow{R_{V_1,V_3} \otimes \mathrm{id}_{V_2}} V_3 \otimes V_1 \otimes V_2$$

はともに $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ から $V_3 \otimes V_1 \otimes V_2$ へのインターートワイナーになるが，今の場合はとくに互いに等しい写像になることが $U_q(\mathfrak{g})$ の性質からわかる．一方，$V_1 \otimes V_2$ と $V_2 \otimes V_1$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の表現として同値な表現であることに注意すると，R_{V_1,V_2} と $R_{V_1 \otimes V_2, V_3}$ は可換であること，すなわち図式

$$\begin{array}{ccc}
(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{R_{V_1 \otimes V_2, V_3}} & V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) \\
{\scriptstyle R_{V_1,V_2} \otimes \mathrm{id}_{V_3}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{V_3} \otimes R_{V_1,V_2}} \\
(V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 & \xrightarrow{R_{V_2 \otimes V_1, V_3}} & V_3 \otimes (V_2 \otimes V_1)
\end{array}$$

が可換であることがわかる．$U_q(\mathfrak{g})$ の表現に関する上の 2 つの性質をあわせると図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V_3 \otimes V_2 \otimes V_1 & & \\
 & {\scriptstyle R_{V_2,V_3} \otimes \mathrm{id}_{V_1}} \nearrow & & \nwarrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{V_3} \otimes R_{V_1,V_2}} & \\
V_2 \otimes V_3 \otimes V_1 & & & & V_3 \otimes V_1 \otimes V_2 \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_{V_2} \otimes R_{V_1,V_3}} \uparrow & & & & \uparrow {\scriptstyle R_{V_1,V_3} \otimes \mathrm{id}_{V_2}} \\
V_2 \otimes V_1 \otimes V_3 & & & & V_1 \otimes V_3 \otimes V_2 \\
 & {\scriptstyle R_{V_1,V_2} \otimes \mathrm{id}_{V_3}} \nwarrow & & \nearrow {\scriptstyle \mathrm{id}_{V_1} \otimes R_{V_2,V_3}} & \\
 & & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & &
\end{array}$$

が可換になることがわかり，この可換性はヤン-バクスター方程式を意味する．すなわち R_{V_1,V_2} は(とくに $V_1=V_2=V$ のとき)ヤン-バクスター方程式の解，すなわち R 行列になる．

一般に量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ とその V 上の表現を与えたとき，古典極限が成分いれかえ写像であるインターートワイナー $V\otimes V\to V\otimes V$ を R 行列において第1, 4章でやったように組みひも群の表現をつくることにより結び目の不変量がえられる．この不変量を結び目の**量子** $(\mathfrak{g}, V)$ **不変量**とよぶ．与えられた結び目に対する量子不変量の値は，定義より複素パラメータを含む複素数になるが，実際には変数 $q^{\pm1}$ の多項式で表される．たとえば，第2章で紹介された結び目不変量の HOMFLY 多項式は量子 $(\mathfrak{sl}_n, V)$ 不変量(この V は $\mathfrak{sl}_n$ のベクトル表現)で，とくに $n=2$ の場合がジョーンズ多項式(第1章参照)になることが知られている．

任意のリー環とその表現を指定するごとに結び目不変量が1つできるので，我々はばく大な数の不変量を得たことになる．このばく大な数の不変量を理解するために1990年前後に2つの方法が現れた．1つは量子不変量を共通の性質でくくるバシリエフ不変量で，もう1つはすべての量子不変量を1つの不変量に統一するコンツェビッチ不変量である．

5・2 バシリエフ不変量

1989年に，バシリエフ不変量(有限型不変量)というまったく新しい概念が，量子不変量とは独立に登場した．結び目の不変量を特異結び目の不変量に拡張し，$d+1$ 個の2重点をもつ任意の特異結び目に対してその値が0になるような結び目不変量を次数 d のバシリエフ不変量とよぶのであった(第3章参照)．量子不変量の係数はバシリエフ不変量になることがバーマンとリンによって示されている．すなわち

定理 $Q(K)$ を結び目 K の量子 $(\mathfrak{g}, V)$ 不変量(変数 $q^{\pm1}$ の多項式)とするとき，$Q(K)$ に $q=e^h=1+h+\frac{1}{2}h^2+\cdots$ を代入してえられる h のべき級数

の d 次の係数を $u_d(K)$ とおく．すなわち

$$Q(K)|_{q=e^h}=\sum_{d=0}^{\infty}u_d(K)h^d.$$

このとき結び目不変量 u_d は次数 d のバシリエフ不変量になる．

この定理は次のようにして示される．R 行列を用いた結び目不変量の定義(第1章参照)において正の交点(第3章図1の K_+)に R 行列，負の交点(第3章図1の K_-)にその逆行列 R^{-1} を対応させた．そこで，量子不変量を特異結び目の不変量に拡張したとき，2重点(第3章図1の K_D)に対しては，$R-R^{-1}$ が対応することになる．とくに古典極限 $q\to 1$ のとき $R=R^{-1}$ なので，$q=e^h$ とおいたとき行列 $R-R^{-1}$ の各成分は(h のべき級数として) h の倍数になる．量子不変量は R 行列の積をとって構成されるので，$d+1$ 個の2重点がある任意の特異結び目 K^{d+1} について $Q(k^{d+1})|_{q=e^h}$ は(h のべき級数として) h^{d+1} でわりきれることがわかる．とくに K^{d+1} に対してべき級数 $Q(k^{d+1})|_{q=e^h}$ の h^d の係数はつねに0になるので，$Q(k)|_{q=e^h}$ の h^d の係数は結び目 K の次数 d のバシリエフ不変量になる．

さらに定理のバシリエフ不変量の重み系(第3章参照)は，コード図にリー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 V を代入することによって定義される写像 $W_{\mathfrak{g},V}$ (後述)に等しくなることがピューニキン(Piunikhin)によって示されている．

5・3　絡み数

コンツェビッチ不変量の話をする前に，まず絡み数を積分で表示する方法ついて説明しよう．というのも，コンツェビッチ不変量は，この積分を，コード図と呼ばれるものを用いて一般化したものだからである．

簡単のため，2本のひもからなる向きのついた絡み目について考える．たとえば，次ページの図1に示した右ホップ絡み目，左ホップ絡み目，ホワイトヘッド絡み目がそうである．これら3つの絡み目は互いに異なること，つまり互いにイソトピックではないことが知られているが，このことは，次に

述べる**絡み数**からわかる．

絡み数とは，2つのひものうちの一方が他方のひものまわりを右回りに何回まわっているかをあらわす数であり，右ホップ絡み目では1，左ホップ絡み目では -1，ホワイトヘッド絡み目では0である．

絡み数の計算

絡み数は，次のように計算することができる．右ホップ絡み目について説明しよう．これを図2のように3次元空間内に配置する．2つのひもを結ぶ線分として，まず s_1 をとる．この線分を端点が絡み目のひも上にあるように水平にしたままひもの正の向きに沿って持ち上げていくと s_2 を通り，s_3 までくる．さらに s_4 まで動かしてそのまま s_1 まで進める．このようにして線分を動かしていったときの線分の向きの変化を図示すると図2の右のようになり，右回りに1回転している．また，t_1 から t_4 まで動かして t_1 に戻ってきたときは，図のように動くのでまわってはいない．また，この2つの動きで，1番目と2番目のひもを結ぶ水平線分がすべてつくされている．よって，両方の回転数をたして絡み数は1となる．

積分による表示

絡み数の計算法は積分を用いて表示できる．絡み数を計算するときには，2つのひもを結ぶ水平線分について，その方向をあらわす角度に注目していた．この，線分の角度を式できちんと書くため，次のようにする．まず，水平な平面を複素平面とみなす．そして，水平な線分 s をベクトル(たとえば，1番目のひも上にある端点を始点とする)とみなし，対応する複素数を $z(s) = r(s)e^{i\theta(s)}$ と極表示する．絡み数の計算では，$z(s)$ の偏角 $\theta(s)$ の変化を調べていたのである．これは，$z(s)$ の対数

$$\log z(s) = \log r(s) + i\,\theta(s)$$

の虚部として得られる．実際には，線分の長さは最初と最後で同じになるので，$\log z(s)$ の変化をみても絡み数が得られるが，これは，次のような積分

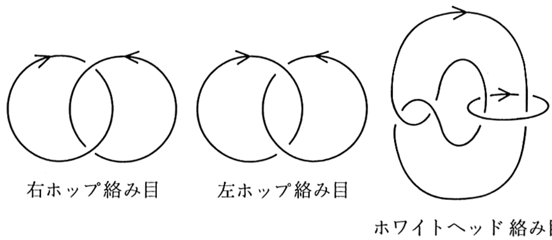


図 1 簡単な絡み目

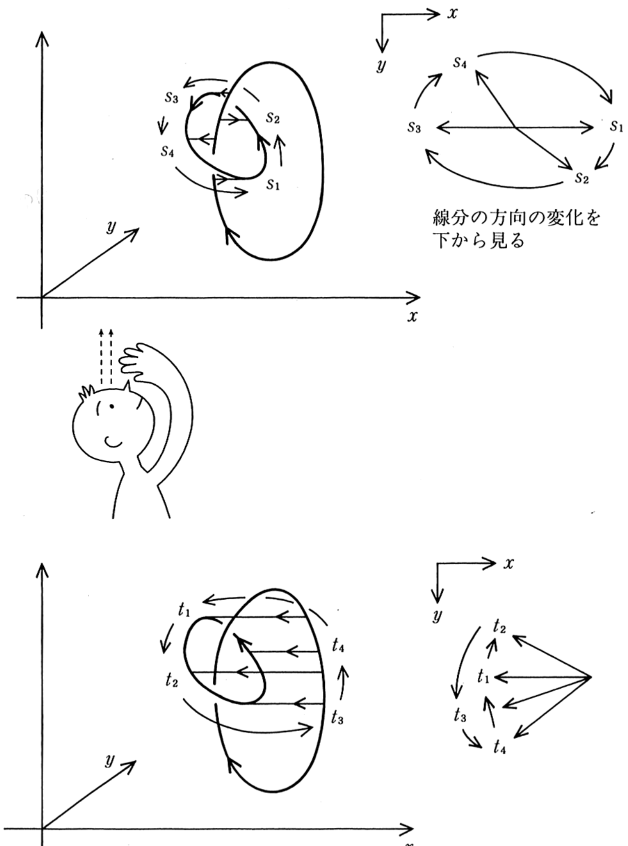
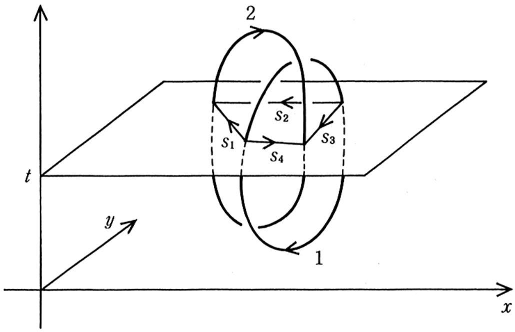


図 2 絡み数の計算



s として s_1, s_2, s_3, s_4 の4通り

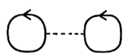
図 3　水平線分の選び方

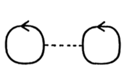
で表示される.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_t \sum_{s:\bigcirc\cdots\bigcirc} \pm d\log z(s(t))$$

ただし, 和の部分は, 高さ t の水平面上の1番目と2番目のひもを結ぶ線分すべての和をとることをあらわしている. たとえば, 上の図3では4通りある. また, 符号は, s の端点でのひもの向きが揃っているときは +, 反対のときは − である.

5・4　コンツェビッチ不変量

ホップ絡み目の絡み数は, 1番目と2番目のひもを結ぶ線分についての積分で書かれた. この線分の選び方は,  という図で表わされるので, 積分を

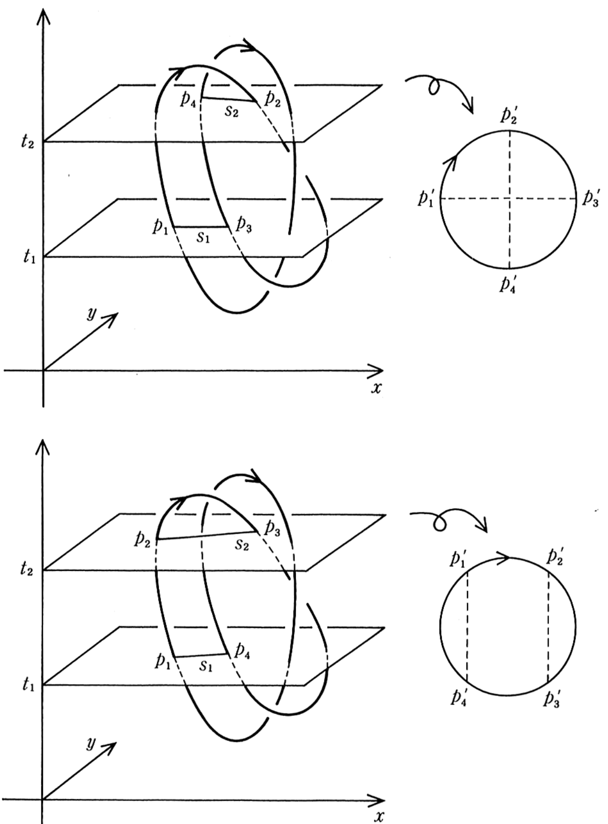
$\Big\langle K,$  $\Big\rangle$

という記号で書くことにしよう. このような図を使うと, 上の積分は次のように一般化できる.

コード図

円周上の $2n$ 個の点を，2 つずつの n 個の組にわけ，それぞれの組を，その組の 2 点を結ぶ点線であらわしたものを**コード図**と呼び，点線のことを**コード**と呼ぶ(第 3 章参照)．また，向きを保つ円周の同相写像で移り合うような図は，同じとする．コードが 2 本あるコード図は  と  であり，3 本あるのは ，  などである．

さて，図 4 左上のような 2 本の水平線分の端点を K 上の向きに沿って見



水平線分　　　　対応するコード図

図 4

ていくと，p_1, p_2, p_3, p_4 の順にある．これに対応して円周上に p_1', p_2', p_3', p_4' をこの順にとる．p_1' と p_3' が s_1 の端点に，p_2' と p_4' が s_2 の端点に対応しているので，それぞれを点線で結ぶ．こうしてできた図4右上のコード図を，端点の位置関係を示すコード図と呼ぶ．同様に，図4左下に対応するコード図も定まる．

積分の一般化

コード図に対応する積分は

$$\left\langle K,\ \right.$$$$\left. \right\rangle = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{t_1<t_2} \sum_{s_1,\, s_2\,:}$$$$\pm d\log z(s_1(t_1)) \times d\log z(s_2(t_2))$$

で定義される．ただし，和は K 上に端点を持つ高さ t_1 の線分 s_1 と高さ t_2 の線分 s_2 で，端点の位置関係がであるものすべての組合せについてとる．また，符号は，絡み数のときと同様に定める．

コンツェビッチ(Kontsevich)は，この積分により，アレキサンダー-コンウェイ多項式の2次の係数と呼ばれるものが表わせることを示した．すなわち，この積分から，結び目の不変量が構成できるのである [12]．

一般に，$Y(K)$ を

$$Y(K) = \sum_{D\,:\,\text{コード図}} \langle K, D\rangle D$$

と定義する．各コード図 D に対応する積分が D の係数となっているコード図の形式的な級数のようなものである．これは，すべてのコード図に対する積分を形式的にまとめて書き表わしたものである．$Y(K)$ は，そのままでは結び目の不変量とはならないが，**枠付け独立関係式**と**4項関係式**(第3章参照)という2つの関係式をコード図に対して考え，簡単な補正をほどこすことにより，コード図の空間 $\mathscr{A}(S^1)$ に値をもつ結び目の不変量となる．これを**コンツェビッチ不変量**と呼び $Z(K) \in \mathscr{A}(S^1)$ とかく [3]．

結び目不変量に関する普遍性

コンツェビッチ不変量からすべてのバシリエフ不変量が構成できる．すなわち，コンツェビッチ不変量のうち，コード(点線)の本数が k 以下のコード図に関する積分，すなわち，$Y(K)$ における係数をすべて考えると，任意の次数のバシリエフ不変量は，これらの一次結合として表わされることが知られている．

また，コンツェビッチ不変量からすべての量子不変量を再構成することもできる．コード図の実線部分，すなわち結び目のひもに当たる部分にリー環 $\mathfrak{g}$ の表現 V を対応させ，コード(点線)にはリー環のキリング形式の双対元という特別な元を対応させることにより線型写像 $W_{\mathfrak{g},V}: \mathscr{A}(S^1) \to \boldsymbol{Q}$ が定義される(コード図に $\mathfrak{g}$, V を代入してえられる**重み系**とよばれる)が，$Z(K)$ におけるコード図を $W_{\mathfrak{g},V}$ で数におきかえることにより，量子 $(\mathfrak{g}, V)$ 不変量をパラメータ h で展開した級数がえられるのである(第9章参照)．

コンツェビッチ不変量で使われた積分の手法は，もともとは微分方程式を解くために考えられたものであるが，河野俊丈が組みひも群の表現を得るのに応用し，量子 R 行列との関連を示唆した．それをドリンフェルト(Drinfel'd)がリー環の包絡環の変形理論に発展させたのだが，このときは，まだコード図の概念はなく，リー環を用いて記述されていたのである．それに対し，コンツェビッチは，コード図を用いて，リー環によらない普遍的な記述を得ることに成功した．そして，コンツェビッチ不変量により，数多くの結び目不変量を統一的に扱えるようになったのである．また，このコード図というのは，リー環の本質を取り出したようなもので，結び目の不変量だけでなく，数学のさまざまな分野で使えるのではないかと期待される．

6章

3次元多様体の量子不変量の誕生

前章までは，おもに絡み目(結び目)の不変量の話であった．本章では，絡み目の量子不変量を組み合わせることによって，どのようにして3次元多様体の位相不変量である量子不変量が得られるのかお話したい．

対象となる3次元多様体とは，いったいどんなものだろうか？ 簡単にいうと，どの点においてもその十分近くは3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ と同じ空間のことを3次元多様体という(序章参照)．たとえば，3次元球面

$$S^3=\{(x,y,z,w)\in\boldsymbol{R}^4\mid x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$$

は3次元多様体である．また，2次元球面 S^2 と S^1 の直積空間 $S^2\times S^1$ もそうである．もちろん，$\boldsymbol{R}^3$ も3次元多様体である．また，境界のない，コンパクト3次元多様体を閉3次元多様体という．S^3，$S^2\times S^1$ などは閉3次元多様体である．

3次元多様体 M_1 と M_2 の間に同相写像が存在するとき，M_1 と M_2 は同相であるという．では，同相な3次元多様体の族はどのくらいあるのだろうか？ 同相な3次元多様体に対して，同じ量を与えるものを位相不変量という．結び目理論と同様に，不変量は分類に大きな役割を果たす．3次元多様体の古典的位相不変量の例として，ホモロジーや基本群がある．これまでにいろいろな位相不変量が発見されてきたが，1980年代後半になって，これま

での不変量とは違うタイプの3次元多様体の量子不変量が大量に構成された.

その3次元多様体の量子不変量の数学的な定義を述べる前に，その基になったウィッテンの経路積分公式 [19] について少し触れる.

6・1　ウィッテンの経路積分公式

場の量子論の量子化の方法として，ファインマンの経路積分による方法とオペレータ形式とよばれる方法がある．量子論では，粒子の振る舞いを波動関数 ψ をとおして捉える．波動関数が満たす波動方程式の解を規格化した解 ψ は確率振幅と呼ばれ，$|\psi|^2$ が粒子の存在確率密度を与える．点 x と点 y を結ぶ経路 l を考えるとき，各経路 l にはラグランジアンから定まる数を対応させせることができる．ファインマンは，ラグランジアンの指数関数を点 x と点 y を結ぶすべての経路 l について和をとったもの，すなわち経路積分が点 x にいた粒子が点 y に到達する確率振幅(確率)になると主張した.

ウィッテンは，この経路積分をチャーン-サイモンズ汎関数をラグランジアンとする3次元多様体上の場の量子論において考えた．M を向きづけられた閉3次元多様体，G をコンパクトなリー群とする．M 上の自明なバンドル $M\times G$ 上の接続の空間を $\mathscr{A}$ によって表す．チャーン-サイモンズ汎関数というのは，$\mathscr{A}$ 上のある汎関数である．接続 A のチャーン-サイモンズ汎関数の値を $CS(A)$ と書くことにすると，ウィッテンの経路積分公式は，整数 K に対して，

$$Z_K(M, G) = \int_{\mathscr{A}} e^{2\pi\sqrt{-1}\,KCS(A)}\mathscr{D}A$$

で与えられる．汎関数 CS はゲージ変換に対して高々整数値ずれるだけなので，K を整数とすれば，被積分関数はゲージ不変になる．ウィッテンは，$Z_K(M, G)$ が M の位相不変量であると主張した．しかし，$\mathscr{A}$ は無限次元空間なので,「測度」$\mathscr{D}A$ は，数学的にまだ定義されていない．したがって，この積分は，まだ数学的には正当化されていないが，ウィッテンが提唱した3次元多様体の不変量構成のプログラムは，低次元多様体論に大きな影響を与

えるのである．

実際の量子不変量の構成の基になっているのは，経路積分の見方から自然に期待される不変量の性質を代数的に捉えたオペレータ形式による量子化である．M を曲面 Σ で切り開くと，境界を Σ とする 3 次元多様体 M_0 と M_1 に分割される．オペレーター形式では，M_0, M_1 にそれぞれヒルベルト空間の 0 でないベクトルが対応する．$Z_K(M, G)$ は，それらのベクトルの内積と等しくなっている．

この内積を数学的に厳密に実現することによって，3 次元多様体の量子不変量が得られた．以下で紹介する量子不変量の定式化において，Σ に対応するのは，トーラスのいくつかの和(絡み目の管状近傍の境界)または(ヒーガード分解を与える) 2 次元閉曲面である．

6・2 量子 $SU(2)$ 不変量

3 次元多様体の量子不変量を定義する前に，不変量を定義するための手がかりとなる，デーン手術とヒーガード分解について述べる．以下で考える 3 次元多様体は，すべて向きづけられた閉 3 次元多様体とする．

3 次元多様体を構成する方法の一つとして，リコリッシュによって得られた，枠付き絡み目に関するデーン手術がある．各成分に，整数(枠)が指定されている絡み目を枠付き絡み目という．絡みの図式において枠は，カールで表される．**デーン手術**とは，以下のような操作のことをいう．まず，枠付き絡み目の管状近傍を取り除く．(管状近傍はソリッドトーラスと同相，図 1) 次に，このソリッドトーラスを，メリディアンサークル(図 2 で示された，ソリッドトーラス内の円板の境界)が，絡み目の管状近傍の境界上の枠を表す曲線(図 2 の太い線)と一致するように埋め直す(図 2)．

リコリッシュは，任意の 3 次元多様体が，ある枠付き絡み目に関するデーン手術によって得られることを示した．では，二つの枠付き絡み目から，いつ同じ 3 次元多様体ができるのだろうか？ カービー(Kirby)がその解答を与えた．それは**カービー移動**と呼ばれる，次の二つの移動(KI), (KII)であ

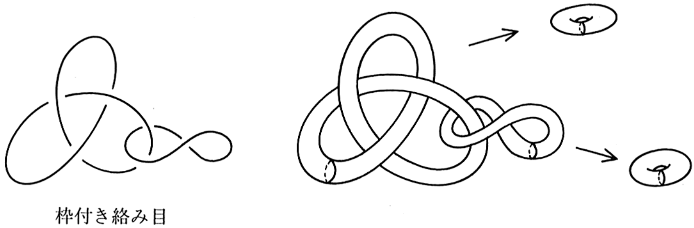


図1

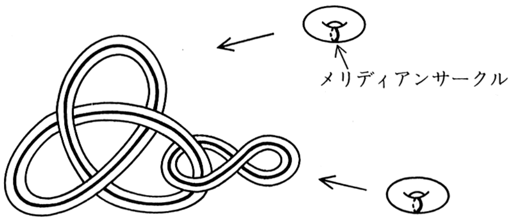


図2　デーン手術

る．

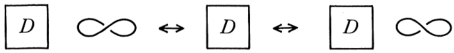
(KI)　枠が ±1 の自明な結び目を加える，または取り除く．(図3)

(KII)　絡み目のある成分に平行な閉曲線をとり，それと他の成分を帯でつなぐ．その閉曲線と他の成分と帯とで，新しい成分を作る．(図4)

カービーは,「二つの枠付き絡み目が，同相な3次元多様体を定めるための必要十分条件は，その二つの絡み目が(KI)と(KII)を有限回行うことによって移りあうことである」ということを証明した．

さらに，フェーン(Fenn)とルーク(Rourke)は，上の二つの移動(KI)，(KII)と同値である図5の移動(**フェーン-ルークの移動**とよばれる)を発見した．

次に，3次元多様体のヒーガード分解について述べる．向きづけ可能な2次元閉曲面には，球面，トーラス，さらに一般に図6のような g 個の穴の空いた曲面がある．この数 g のことを曲面の種数という．種数 g の2次元閉

(K I) 

D：絡み目の図式

図 3

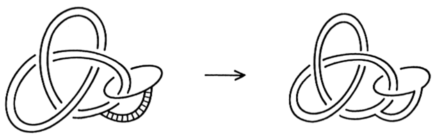
(K II) 

図 4　カービー移動

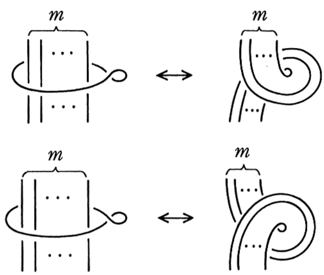
(FR) 

図 5　フェーン-ルークの移動

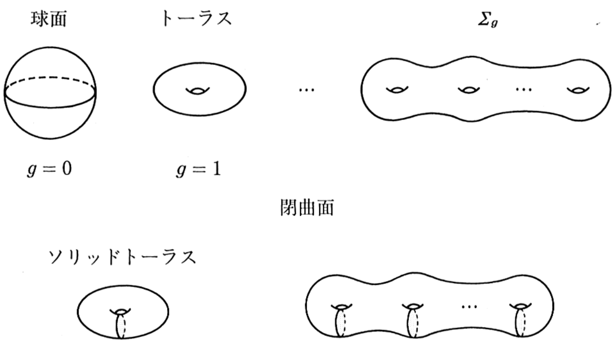


図 6

曲面を Σ_g で表す．Σ_g の中身のつまったものを種数 g のハンドル体という．ソリッドトーラスは，種数1のハンドル体である．すべての3次元多様体は，ある種数 g の二つのハンドル体に分解することができる．これを**ヒーガード分解**という．逆にいうと，任意の3次元多様体は，二つの種数 g のハンドル体をその境界 Σ_g の，ある自己同相写像によって貼り合わせることにより得られる．Σ_g の自己同相写像のイソトピー類の集合は，合成を積として，群をなす．これを Σ_g の**写像類群**といい，$\mathcal{M}_g$ で表す．

一般に，3次元多様体 M のヒーガード分解は一意的ではないが，M の二つのヒーガード分解について，ライデマイスターとシンガー(Singer)によって与えられた「安定同値定理」がある．M のあるヒーガード分解に，S^3 の標準的なソリッドトーラスへのヒーガード分解を連結和する操作を**基本的安定化操作**という．この操作によって，M のヒーガード分解より種数の一つ多い二つのハンドル体とそれらの貼り合わせ写像が得られる．基本的安定化操作を有限回施すことにより，M の二つのヒーガード分解は同型にできるというのが，「安定同値定理」である．

さて，本題の量子不変量の話に入ろう．レシェチヒンとトゥラエフ[15]は，ウィッテンが提唱した3次元多様体の位相不変量を，初めて数学的に厳密に構成した．それは量子 $SU(2)$ 不変量と呼ばれる．不変量の構成において，上で述べたリコリッシュの定理とフェーン-ルークの定理が鍵となる．定理から，3次元多様体 M は，ある枠付き絡み目 L に関するデーン手術によって得られる．レシェチヒンとトゥラエフは，その枠付き絡み目 L の量子不変量を組み合わせることによって，3次元多様体の位相不変量を構成した．

枠付き絡み目の量子不変量は，リー環 $\mathfrak{g}$ とそれに付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の既約表現を絡み目の各成分に指定するごとに得られる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$，$K$ を正の整数，量子化パラメータ q が1の原始 $(2+K)$ 乗根のとき，ある意味で閉じた $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $(2i+1)$ 次元既約表現 V_i の族 $\{V_0, V_{1/2}, V_1, \cdots, V_{K/2}\}$ が存在する．

枠付き絡み目 L の各成分に，この族に属する表現を指定する．すなわち，L の成分数を m とするとき，$\lambda : \{1, \cdots, m\} \to \{0, 1/2, 1, \cdots, K/2\}$ を一つ固定する．得られる L の量子不変量を $Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(L)$ と書くことにする[1]と，$Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(L)$ に重みをつけて λ について足しあげたものが 3 次元多様体 M の量子不変量である．より正確には，

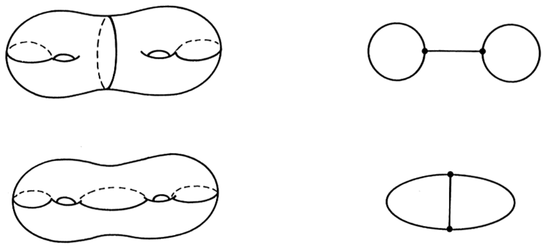
$$\frac{\sum_{\lambda} [2\lambda(1)+1] \cdots [2\lambda(m)+1] Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(L)}{(\sum [2\lambda(1)+1] Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(U_+))^{\sigma_+} (\sum [2\lambda(1)+1] Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(U_-))^{\sigma_-}}$$

が，L のカービー移動のもとで不変であること，すなわち，M の位相不変量となることが示された．これを 3 次元多様体 M の**量子 $SU(2)$ 不変量**とよぶ．ここで $[i] = \dfrac{q^{\frac{i}{2}} - q^{-\frac{i}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$ ($[2i+1]$ は V_i の量子次元とよばれる)，$U_\pm$ はそれぞれ枠が ± 1 である自明な結び目，$\sigma_\pm$ は対角成分が絡み目の枠，他の成分が絡み数である行列の正と負の固有値の数である．カービーとメルビン (Melvin) [10] も，レシェチキンとトゥラエフと同様の方法で，量子 $SU(2)$ 不変量を定式化し，他の不変量との関係等，不変量のいろいろな性質を発見した．

また，河野俊丈 [11] は，2 次元共形場理論から得られる写像類群の表現を利用し，3 次元多様体のヒーガード分解に着目することによって，3 次元多様体の位相不変量を構成した．これは，レシェチキンとトゥラエフが定義した量子 $SU(2)$ 不変量と一致することが知られている．

3 次元多様体 M が種数 g のヒーガード分解を持つとする．正の整数 K を固定するごとに，共形場理論から得られる，種数 g の 2 次元閉曲面の写像類群 $\mathcal{M}_g$ の表現 ρ_g の表現空間の基底は，次のようなグラフと 1 対 1 に対応する．(図 7)　種数 g の閉曲面のパンツ分解の双対グラフを考え，グラフの各辺に $\{0, 1/2, 1, \cdots, K/2\}$ の元を指定する．頂点に集まる三つの辺に指定された元 i, j, k が条件

1)　λ が，すべての i に対して $\lambda(i) = \dfrac{1}{2}$ である写像のとき，$Q^{\mathfrak{sl}_2, \lambda}(L)$ は，L のジョーンズ多項式となる．



パンツ分解　　　　　　　　　　双対グラフ

図7

$$|i-j| \leqq k \leqq i+j, \quad i+j+k \in \boldsymbol{Z}, \quad i+j+k \leqq K$$

を満たすグラフが基底と1対1に対応する．

すべての辺に0が指定されたグラフに対応する基底を v_0 とし，v_0^* をその双対基底とする．河野は，

$$S_{00}^{-g}\langle v_0^*, \rho_g(v_0)\rangle$$

が M の位相不変量であることを示した．ここで，$S_{00}=\sqrt{\dfrac{2}{K+2}}\sin\dfrac{\pi}{K+2}$ である．$\langle v_0^*, \rho_g(v_0)\rangle$ のライデマイスター-シンガーの基本的安定化操作の下での振る舞いと，ハンドル体の自己同相写像に拡張する閉曲面の写像類群の元の v_0 への作用が自明であることから，位相不変性が証明される．

さらに，リコリッシュ[13]は，線形スケイン理論を利用した量子 $SU(2)$ 不変量の定義を与えた．

まず，線形スケイン理論について説明する．F を，その境界 ∂F に有限個の固定された点を持つ向きづけられた曲面とする．F 内の絡み目図式とは，端点が固定された点である有限個の弧と閉曲線の集合のことをいう．

A を複素数とする．F 内の絡み目図式で張られる $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間で以下の関係式を持つものを F の**線形スケイン**といい，$\mathcal{S}(F)$ によって表す．

（1）　$D \cup \bigcirc = (-A^2-A^{-2})D$

（2）　 $= A$  $+A^{-1}$ 

線形スケインの例をいくつかあげよう．関係式(2)より，任意の絡み目図

式は，交点のない図式の線形和に一意的に表せるので，(1)から平面の線形スケイン $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^2)$ は $\boldsymbol{C}$ と同型である．

円環面の線形スケイン $\mathscr{S}(S^1\times I)$ (I は単位区間)は，図 8 のように，積を，二つの円環面のそれぞれの境界(図の破線)の一つを同一視することにより定義すると，可換代数になる．円環面を一周する閉曲線を基底(α で表す)としてとることができ，$\mathscr{S}(S^1\times I)$ は，多項式環 $\boldsymbol{C}[\alpha]$ と同型になる．

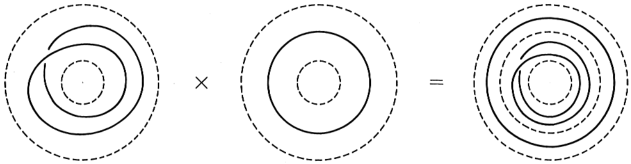


図 8　$\mathscr{S}(S^1\times I)$の積

重要な例は，$2n$ 個の点を境界に固定した円板 D^2 の場合の線形スケイン $\mathscr{S}(D^2, 2n)$ である．円板を，左の辺に n 個，右の辺に n 個の点を持つ正方形とみなすことによって，積を図式の並置によって定義できる．(図 9)　この図において，$D_1, D_2 \in \mathscr{S}(D^2, 2n)$ である．

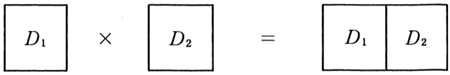


図 9　$\mathscr{S}(D^2, 2n)$の積

この積により，$\mathscr{S}(D^2, 2n)$ は代数となる．これをテンパリー-リーブ代数(第 4 章参照)といい，TL_n で表す．TL_n には，自分自身との積が自分自身になるような，ある元 $f^{(n)}$ (ジョーンズ-ウェンツェル冪等元)が存在する．$\Delta_n \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^2) \cong \boldsymbol{C}$，$S_n(\alpha) \in \mathscr{S}(S^1\times I) \cong \boldsymbol{C}[\alpha]$ を以下で定義する．

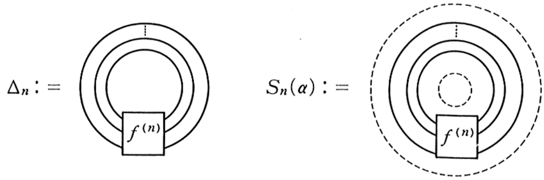


図 10　Δ_n と $S_n(\alpha)$ の定義

$r \geqq 2$ なる整数に対して，$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \in \mathscr{S}(S^1 \times I)$ とする．D を m 個の成分をもつ絡み目の図式とするとき，多重線形写像

$$\langle\ ,\ ,\cdots,\ \rangle_D :$$

$$\underbrace{\mathscr{S}(S^1 \times I) \times \mathscr{S}(S^1 \times I) \times \cdots \times \mathscr{S}(S^1 \times I)}_{m} \longrightarrow \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^2)$$

を，図式を含む m 個の円環面を D の成分の近傍にはめ込むことによって定義する．交点の情報は，D の交点の情報に従うものとする．

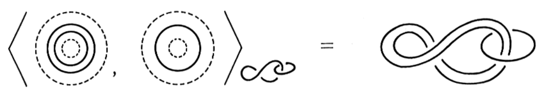


図 11　例

以上の準備で，線形スケイン理論による量子 $SU(2)$ 不変量の定義を述べることができる．ここでも，鍵となるのはデーン手術とカービーの定理である．3次元多様体 M が図式 D をもつ枠付き絡み目に関するデーン手術によって得られるとする．$r \geqq 3$，A を1の $4r$ 乗根または，$2r$ 乗根(r は奇数)とする．このとき，リコリッシュは

$$\langle \omega, \omega, \cdots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-\sigma_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-\sigma_-}$$

が，カービーの移動(KI)，(KII)で不変であること，すなわち，M の位相不変量(量子 $SU(2)$ 不変量)となることを示した．

三つの方法で量子 $SU(2)$ 不変量を定義したが，どの定義でも，実際に計

算するのは非常に難しい．いまだに，この不変量がどのくらい強いものなのかはよくわかっていないが，同じ量子 $SU(2)$ 不変量をもつ，位相同型でない 3 次元多様体の組が無限個存在することがわかっている．

6・3　量子 G 不変量

他のリー群 G に対する量子 G 不変量について少し述べて，この章を終えることにする．トゥラエフとウェンツェル(Wenzl)は，任意の古典型単純リー環に付随する量子群の表現(q は 1 のベキ根)の性質を調べることにより，3 次元多様体の量子不変量の存在を示した．

また，河野俊丈と高田敏恵は，絡み目の量子 $\mathfrak{sl}_n$ 不変量の振る舞いを詳しく観察することにより，3 次元多様体の量子 $SU(n)$ 不変量が二つの位相不変量の積として書けることを発見した．ただし，n と素な正整数 k に対して，$q=\exp\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{n+k}$ とする．二つの不変量のうち，一つは絡み目の絡み数のつくる行列から決まる量であり，もう一方は，量子 $SU(n)$ 不変量より精密な不変量で，**量子 $PSU(n)$ 不変量**と呼ぶ．$n=2$ のとき量子 $PSU(2)$ 不変量は，すでにカービーとメルビンによって定義されていたもので，**量子 $SO(3)$ 不変量**とも呼ばれる．

量子 $SU(n)$ 不変量を定義するために，$q=\exp\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{n+k}$ のときの量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の有限次元既約表現の有限個の族 $P(n,k)$ を用いる．リー環 $\mathfrak{sl}_n$ の有限次元既約表現と同様に，$P(n,k)$ の元はヤング図形によって表すことができる．ヤング図形というのは，以下のような正方形を並べた図形で，横に並んでいる正方形の数が，下にいくにつれて非増加になっているものである．

$P(n,k)$ に属する元の集合は，縦に並ぶ正方形の数が $n-1$ 以下，横に並ぶ正方形の数が k 以下のヤング図形と 1 対 1 に対応する．$P(n,k)$ には n 次巡回群 $\boldsymbol{Z}_n$ が作用していて，n と k が互いに素なとき，その作用の基本領域として，正方形の個数が n で割り切れるヤング図形に対応する元からなる集合 $D(n,k)$ をとることができる．$D(n,k)$ に属する表現 V を動かすことによって得られる，絡み目の量子 $(\mathfrak{sl}_n, V)$ 不変量を足しあげたものが量子

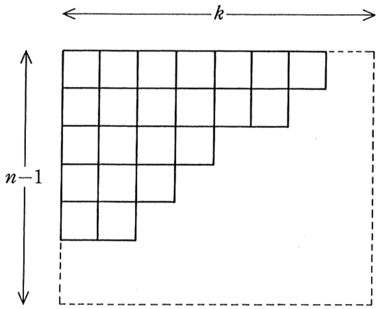


図 12　ヤング図形

$PSU(n)$ 不変量である．上のような条件をみたす表現 V はリー群 $SU(n)$ の表現とみたときリー群 $PSU(n)$ の表現に簡約できるものである，ということが量子 $PSU(n)$ 不変量の名前の由来である．

量子 $PSU(n)$ 不変量はきれいな性質を持っていて，レベル k とランク n を逆にすると，不変量の値は複素共役になる(レベル-ランク双対性)．また，村上斉によって，量子 $SO(3)$ 不変量とキャッソン不変量の関係が示されている(第8章参照)．

一方，最近，結び目の量子不変量と同様に，大量の3次元多様体の量子不変量を統一的に理解しようとする動き(第9章参照)がでてきた．しかし，結び目の量子不変量の統一理論と比較するとまだ解明すべき点が多い．これからの発展が期待される．

7章

3次元多様体の単体分割と量子不変量

本章では，単体分割を用いて定義されるトゥラエフ-ビロ不変量［17］とダイグラーフ-ウィッテン不変量［8］について解説し，これらの不変量を境界つき3次元多様体の不変量に拡張すると自然に位相的量子場の理論の公理を満たすことを説明する．これらの不変量はどちらも一種の「状態和」として定義される．

7・1　多様体の位相型を変えない単体分割の変形——パヒナー変形

位相幾何学では，球面は四面体の表面と同じものとみなす．ここで，四面体の表面は合計4つの三角形からできていて，これら4つが三角形の辺同士

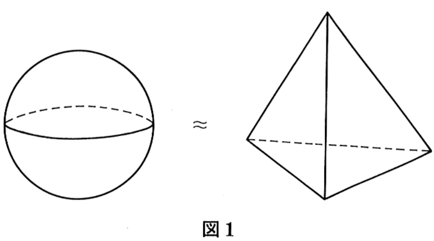


図1

をのりしろとして，ぴったりと貼り合わさってできていることに注目しよう．一般に，与えられた曲面(2次元多様体)を辺同士でぴったりと貼り合わさってできた三角形の和集合に分割するとき，この分割の仕方をその曲面の**単体分割**と呼ぶ．この定義において，三角形を線分や四面体に変えたりすることにより，曲線(1次元多様体)や3次元多様体の単体分割が定義される．先ほどの例の場合では，頂点(0-単体)，辺(1-単体)，三角形(2-単体)が順に4個，6個，4個あるような球面の単体分割になっている．

単体分割を考える利点は，単体の貼り合わされ方を通して，与えられた図形を組合せ的に考察することが可能となることにある．たとえば，曲面の単体分割を1つとり，(頂点の個数)－(辺の個数)＋(三角形の個数)という数を考えると，これは単体分割の選び方によらないことが証明される．このもっとも素朴に定義される数は曲面のオイラー数と呼ばれ，曲面の分類に利用される．

さて，与えられた曲面の単体分割はたくさんあるが，これらのどんな2つも図2のような非常に単純な変形(右から左への変形と左から右への変形)の繰り返しによって移りあうことが知られている．同様の変形は任意の次元で定義されていて(図3は3次元における変形である．上段の右図，下段の右図，下段の左図では，それぞれ4つ，3つ，2つの四面体が頂点，辺，三角形を共有して貼り合わさっている)，これらの変形は**パヒナー変形**(または**アレクサンダー変形**)と呼ばれている．

定理 (パヒナー(Pachner))　コンパクトな多様体の単体分割が2つ与えられていて，多様体の境界上では分割の仕方が一致しているとする．このとき，境界上の分割の仕方を変えないようなパヒナー変形を有限回施すことにより，一方の分割からもう一方の分割を得ることができる．

オイラー数のように，多様体の単体分割を利用して定義された量が位相不変量であることを示すためには，パヒナー変形の下でその量が不変なことを

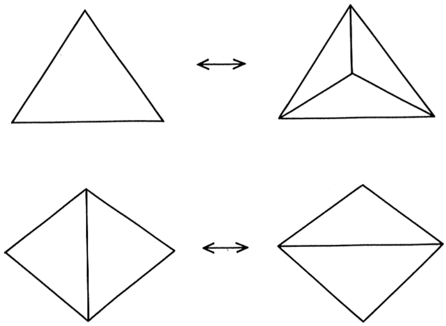


図 2　曲面の分割に関するパヒナー変形

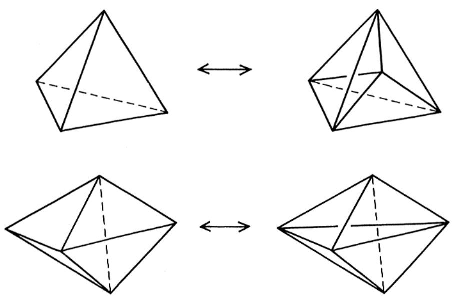


図 3　3 次元多様体の分割に関するパヒナー変形

示せばよい．

この定理は，1930 年のアレクサンダーによる結果を 1990 年頃，パヒナーが球体の単体分割の縮約可能性の研究の中で改良したものである．1990 年頃といえば，トゥラエフ-ビロ不変量やダイグラーフ-ウィッテン不変量をはじめとする 3 次元多様体の量子不変量が次々と生み出された時期でもある．

7・2　トゥラエフ-ビロ不変量

2 次元特殊ユニタリー群 $SU(2)$ については，0 以上の各半整数 i に対して，$(2i+1)$ 次元の既約表現 V_i が同型を除いてただ 1 つ定まる．$SU(2)$ の

4つの既約表現 V_a, V_b, V_c, V_d に対して，テンソル表現 $V_a\otimes V_b\otimes V_c$ から表現 V_d への $SU(2)$ 作用と可換な線型写像(すなわちインターートワイナー)全体のなすベクトル空間は，つぎの図で表されるような2種類の自然な基底を持っている．

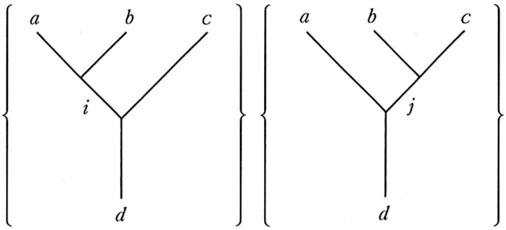
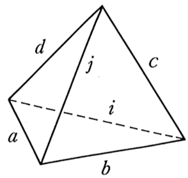


図4　2種類の基底

ここで，i, j はそれぞれ V_i, V_j が $V_a\otimes V_b$，$V_b\otimes V_c$ の既約成分として現れるような半整数全体を動く．また，左図は $V_a\otimes V_b$ の部分を V_i へ射影したのち，$V_i\otimes V_c$ を V_d へ射影するという合成を表しており，右図は $V_b\otimes V_c$ の部分を V_j へ射影したのち，$V_a\otimes V_j$ を V_d へ射影するという合成を表している．これら2つの基底の変換を表す行列の各成分を**6j記号**という．6j記号の値は $a+b\pm i$，$c+d\pm j$ などの整数の階乗とそれらの平方根の加減乗除を使った式で具体的に書くことができる．そして，そこに現れる整数 n を前章で定義された量子整数 $[n]$ に適当な方法で置き換えることによって**量子6j記号**という複素数が定義される．すなわち，量子6j記号とは V_a, V_b, V_c, V_d に対応する量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現の基底の変換を表す行列の成分である．

3次元多様体のトゥラエフ-ビロ不変量は，この量子6j記号を使って，以下のようにして与えられる．r を3以上の整数とし，半整数からなる集合 $I=\{0, 1/2, 1, \cdots, (r-2)/2\}$ を考える．I の元の3つ組 (i, j, k) が**認容的**であるとは，$i+j+k$ が $r-2$ 以下の整数であって，$|i-j|\leqq k\leqq i+j$ が満たされるときをいう．M を閉3次元多様体(向きづけ不可能でもよい)とし，その単体分割 T を1つとる．T の各辺に I の元を割り振るのであるが，各三角形の3つの辺に割り当てられている I の元が認容的であるようにする．



$$\longmapsto \begin{vmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{vmatrix} \in \boldsymbol{C}$$

量子 6j 記号

このような割り振り方を**カラー**(または**状態**)と呼ぶ．カラーを1つ与えて，図5のように各四面体に対して量子6j記号を対応させる．そして，四面体の合同変換に関して対称性を持つように量子6j記号を正規化して，すべての四面体に関してこれらの積をとってからすべてのカラーについて和をとる．こうして得られた複素数は，量子6j記号の満たす性質からパヒナー変形の下で不変になり，M の位相不変量を与える．この位相不変量を**トゥラエフ-ビロ不変量**といって，$TV_r(M)$ と書くことにする．

$TV_r(S^2\times S^1)=1$ と正規化しておくと，$TV_r(S^3)=\dfrac{1}{r}\sin^2\dfrac{\pi}{r}$，$TV_r(S^1\times S^1\times S^1)=(r-1)^2$ となる．多様体が複雑になると単体分割による計算は困難になるが，r が小さい場合には，多様体のグラフ表示を用いて，カウフマンとリン(Lins)がコンピュータを使った計算例を挙げている．

M が向きづけ可能なとき，トゥラエフ-ビロ不変量 $TV_r(M)$ は，前章で定義された量子 $SU(2)$ 不変量(前章の K が $r-2$ に対応する)の絶対値の2乗(したがって，$TV_r(M)$ は実数)になることがトゥラエフやロバーツ(Roberts)によって証明されている．

[Kau]にはここで述べたこととは違う観点からトゥラエフ-ビロ不変量が紹介されている．

7・3 境界つき多様体の不変量への拡張と(2+1)次元位相的量子場の理論

トゥラエフ-ビロ不変量は境界を持つコンパクトな3次元多様体の不変量へ拡張することができる．しかし，境界つき3次元多様体 M に対して単体分割 T をとって先ほどの構成を行うと，その値は M の境界の単体分割の与え方に依存してしまい，M の位相不変量にならない．そこで，M の境界の

単体分割 K を固定する．さらに，K のカラー λ も1つ固定し，T のカラーの動く範囲を境界上で λ に一致するものに限定する．こうすることによって，境界の単体分割およびそのカラーを固定したときの M の位相不変量 $TV_r(M\,;K,\lambda)\in \boldsymbol{C}$ が定義される．

この拡張の仕方は，自然に(2+1)次元の位相的量子場の理論を与えている．それを説明するために，コボルディズムという概念を導入する．コンパクトな3次元多様体 M とその境界のいくつかの連結成分からなる閉曲面 Σ_1, Σ_2 との組 $(M\,;\Sigma_1,\Sigma_2)$ が**コボルディズム**であるとは，$\partial M=\Sigma_1\cup\Sigma_2$ かつ $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\phi$ であるときをいう．イメージとしては，M を粒子が飛び回る世界面(あるいは，時空間)，Σ_i $(i=1,2)$ をある時刻での粒子(あるいは，宇宙)と考えるとわかりやすい．Σ_1 という粒子が時間発展して Σ_2 になったと考える．このような考え方は，第1章の中で，絡み目のジョーンズ多項式を輪切り方式によって定義するときにすでに登場していた．

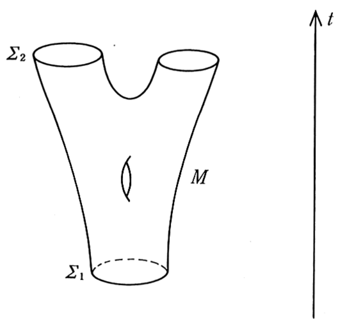


図6　コボルディズムのイメージ

(2+1)次元位相的量子場の理論のアティヤ(Atiyah)による公理系を述べよう[2]．**(2+1)次元位相的量子場の理論**とは，各閉曲面 Σ に対して $\boldsymbol{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $Z(\Sigma)$ を対応させ，コボルディズム $W=(M\,;\Sigma_1,\Sigma_2)$ に対しては線形写像 $Z_W: Z(\Sigma_1)\to Z(\Sigma_2)$ を対応させる規則(関手)Z であって，以下の公理[1)] を満足するものをいう：

（1）　合成可能なコボルディズム $W_1=(M_1\,;\Sigma_1,\Sigma_2)$，$W_2=(M_2\,;\Sigma_2,$

Σ_3) について(図 7 参照)

$$Z_{W_2 \circ W_1} = Z_{W_2} \circ Z_{W_1}.$$

(2)　曲面 Σ 上の恒等コボルディズム $\mathrm{id}_\Sigma = (\Sigma \times [0,1]\,;\,\Sigma \times 0, \Sigma \times 1)$ に対して

$$Z_{id_\Sigma} = \mathrm{id}_{Z(\Sigma)}.$$

(3)　共通部分を持たない 2 つの曲面 Σ_1, Σ_2 に対して

$$Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2).$$

(4)　空集合 ϕ も 1 つの曲面と考えることにし，

$$Z(\phi) = \boldsymbol{C}.$$

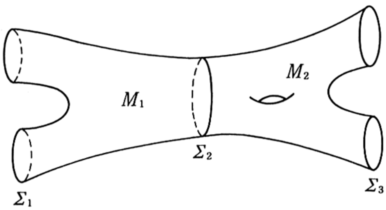


図 7　コボルディズムの合成 $W_2 \circ W_1$

閉 3 次元多様体 M を $W := (M\,;\,\phi, \phi)$ なるコボルディズムとみなすと，公理(4)から Z_W は $\boldsymbol{C}$ 上の線形変換を与え，Z_W による $1 \in \boldsymbol{C}$ の像を $Z(M)$ とおくと，これは M の位相不変量になる．また，閉曲面 Σ に対して，$\Sigma \times S^1$ が恒等コボルディズム id_Σ の両端の Σ をねじらずに張り合わせて得られることから，公式 $Z(\Sigma \times S^1) = \dim Z(\Sigma)$ が成立する．

Z_W は，$Z(\Sigma)$ がある時刻での粒子の状態(粒子の波動関数)からなる空間で，ある状態から始めて時間発展するとどのような状態に到達するのか，を記述していると考えられる．今の場合，公理(2)から Z_W が時空の長さによらないような量子場の理論を考えていることになる．

1)　場の理論を考えるときには，通常は多様体が向きづけられている場合を考える．この場合には，条件 $Z(-\Sigma) = Z(\Sigma)^*$ も考慮する．ここで，$-\Sigma$ は Σ の向きを逆にして得られる曲面であり，$Z(\Sigma)^*$ はベクトル空間 $Z(\Sigma)$ の双対空間である．

境界つき3次元多様体に対するトゥラエフ-ビロ不変量から，(2+1)次元位相的量子場の理論を作るには次のようにすればよい．まず，曲面 Σ に対しては，三角形分割 K を1つ固定して，K のカラー全体を基底とする $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間を形式的に考える．これを $V(\Sigma\,;K)$ と書くことにする．コボルディズム $W=(M\,;\Sigma_1,\Sigma_2)$ に対しては，$\Sigma_i(i=1,2)$ の単体分割 K_i を固定して，K_1 の各カラー λ_1 を $\sum_{\lambda_2} TV_r(M\,;K_1\cup K_2,\lambda_1\cup\lambda_2)\lambda_2$ に写すような $V(\Sigma_1\,;K_1)$ から $V(\Sigma_2\,;K_2)$ への線形写像 Φ_W を対応させる．ここで，λ_2 は K_2 のカラー全体を動き，$\lambda_1\cup\lambda_2$ は λ_1,λ_2 から自然に決まる $K_1\cup K_2$ のカラーを表す．じつは，この対応規則では，公理(2)が成り立たないばかりでなく境界の三角形分割の取り方に依存してしまう．そこで，商ベクトル空間 $Z(\Sigma\,;K):=V(\Sigma\,;K)/\mathrm{Ker}\,\Phi_{\mathrm{id}_\Sigma}$ を考えると，線形写像 $\Phi_W:V(\Sigma_1\,;K_1)\to V(\Sigma_2\,;K_2)$ は線形写像 $Z_W:Z(\Sigma_1\,;K_1)\to Z(\Sigma_2\,;K_2)$ を導き，Z は(2+1)次元位相的量子場の理論を与えることがわかる．

7・4　ダイグラーフ-ウィッテン不変量

ダイグラーフ(Dijkgraaf)とウィッテンは，コンパクトリー群 $SU(2)$ のかわりに有限群 G を用いると，3次元多様体の不変量のウィッテンの経路積分公式に対応するものが，経路積分を使わずに構成できることを示した．彼らは，有限群 G の分類空間 BG の1次元ユニタリー群 $U(1)$ を係数とする各3次元コホモロジー類 α に対して，チャーン-サイモンズ汎関数の類似物が $\langle\gamma^*\alpha,[M]\rangle$ (ただし，$\gamma:M\to BG$ は連続写像)で与えられることに着目し，位相不変量

$$Z(M)=\frac{1}{|G|}\sum_{\gamma}\langle\gamma^*\alpha,[M]\rangle$$

を考えた．ここで，$|G|$ は有限群 G の位数，$[M]\in H_3(M\,;U(1))$ は向きづけられた閉3次元多様体 M の基本類，$\langle\ ,\ \rangle$ はコホモロジーとホモロジーの間のクロネッカー積であり，和は γ のホモトピー類にわたってとる．これを**ダイグラーフ-ウイッテン不変量**と呼ぶ．さらに，彼らは格子ゲージ理論

への還元を試みることにより，この不変量の単体分割に基づく公式を与え，(2+1)次元位相的量子場の理論を構成した．ここでは，単体分割に基づくこの不変量の再構成について，簡単のために α が自明な場合に限って説明しよう．この場合には M は必ずしも向きづけ可能でなくてもよい．

G を有限群とする．M を境界があってもよいコンパクトな3次元多様体とし，その単体分割 T を1つとる．今度は T の向きづけられた各辺に G の元を対応させる規則 φ であって，次の2つの条件を満足するものを**カラー**と呼ぶことにする．

(i) 各向きづけられた辺 E に対して

$$\varphi(-E) = \varphi(E)^{-1}.$$

(ii) E_1, E_2, E_3 が三角形の図8のように向きづけられた3辺のとき

$$\varphi(E_3) = \varphi(E_1)\varphi(E_2).$$

ただし，$-E$ は E の向きを逆にして得られる辺を表す．

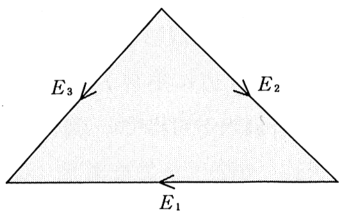


図8

M の境界のカラー λ を1つ固定して

$$Z(M\,;\lambda) := (\sqrt{|G|})^{-2a+e}\,\#\{M \text{ のカラーであって境界では } \lambda \text{ と一致するもの全体}\}$$

とおく．ここで，a は T の頂点の個数，e は M の境界上にある T の頂点の個数である．上式の右辺は境界の分割を変えないようなパヒナー変形で不変であり，したがって，境界の単体分割とそのカラーを固定したときの M の位相不変量となる．特に，M に境界がなく連結な場合には，その値は M の基本群の G への表現の個数を G の位数で割ったものに等しい．

トゥラエフ-ビロ不変量の場合と同様にして，境界つき多様体に対するダイグラーフ-ウィッテン不変量の構成方法をもとに，(2+1)次元位相的量子場の理論を作ることができる．このことはイェッターによって厳密に証明された．和久井道久は α が一般の場合に厳密に証明した．

村上斉，大槻知忠，岡田(現塩見)真枝は枠付き絡み目の絡み行列を用いて向きづけられた閉3次元多様体の不変量を定義したが，この不変量の特別な場合として，G が巡回群の場合のダイグラーフ-ウィッテン不変量が得られることも示している．

7・5　量子 G 不変量と位相的量子場の理論

前章で定義された量子 G 不変量についても位相的量子場の理論 Z が構成されている．そのおおまかなアイデアを量子 $SU(2)$ 不変量 $\tau_r(M)$ の場合に述べよう．

向きづけられた連結な閉曲面 Σ を図9のように，3次元ユークリッド空間の中に標準的に埋め込まれたグラフ Γ に厚みをつけて得られるハンドル体 H の境界として考える．Γ の各辺に集合 $I=\{0, 1/2, 1, \cdots, (r-2)/2\}$ の元を割り振る仕方であって，各頂点から出ている3つの辺に対する I の元が認容的なものを**カラー**と呼ぶ．カラー全体を $\boldsymbol{C}$ 上の基底とするようなベクトル空間を形式的に考えて，これを $Z(\Sigma)$ と書く．閉曲面が連結でない場合には，各連結成分について上の構成を行い，得られたベクトル空間のテンソル積をとることにする．次に，向きづけらたコボルディズム $W=(M\,;\Sigma_1, \Sigma_2)$ が与えられたとする．各 Σ_i $(i=1, 2)$ を先ほどのように，グラフ Γ_i に

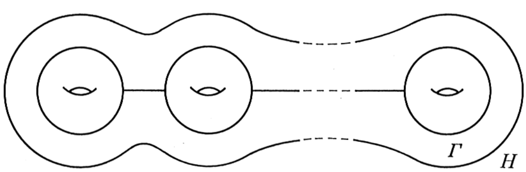


図9

厚みをつけて得られる(いくつかの)ハンドル体 H_i の境界と考える．そして，M と H_i $(i=1,2)$ をそれらの境界で貼り合わせて，向きづけられた閉3次元多様体 $\hat{M}$ を作る．$\hat{M}$ の中にはグラフ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ が埋め込まれていることに注意する．一般に，量子 G 不変量はカラーつき3価グラフを中に含む向きづけらた閉3次元多様体の不変量へ拡張される．この不変量を用いることにより，Γ_i $(i=1,2)$ のカラー λ_i $(i=1,2)$ を与えるごとに複素数 τ_r $(\hat{M}$；$\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \lambda_1 \cup \lambda_2)$ を定めることができ，各 λ_1 に対して λ_2 の係数がその複素数であるような線形和を対応させて，線形写像 $Z_W : Z(\Sigma_1) \to Z(\Sigma_2)$ を定義することができる．

こうして得られた対応規則 Z は(2+1)次元位相的場の理論の公理を「ほぼ」満たす．ここで「ほぼ」とつけたのは，コボルディズムの合成について $Z_{W_2 \circ W_1} = Z_{W_2} \circ Z_{W_1}$ が成立せず，右辺にスカラー倍がかかることによる．スカラー倍のずれは3次元多様体の2-枠(すなわち，3次元多様体 M の接束 TM のホイットニー和の自明化 $TM \oplus TM \overset{\cong}{\Rightarrow} M \times \boldsymbol{R}^6$)の選び方に起因しているものと思われている．

7・6　トゥラエフ-ビロ不変量，ダイグラーフ-ウィッテン不変量のその後

トゥラエフ-ビロ不変量，ダイグラーフ-ウィッテン不変量が定義されて以来，これらの不変量を巡っていろいろなことがわかってきた．たくさんある中で，3つだけ述べて本章を終わりたい．

(3+1)次元位相的量子場の理論を構成することは量子重力と関連して興味深い問題である．しかし，有意義な具体例はあまり知られていない．クレン(Crane)とイェッターは，トゥラエフ-ビロ不変量の定義の仕方をまねて，(単体分割可能な)4次元多様体の不変量および(3+1)次元位相的量子場の理論を構成した(今度は，辺と面にカラーをのせ，4-単体に対して「量子 15 j 記号」と呼ばれる複素数を対応させる)が，その不変量の値は符号数とオイラー数によって決まってしまうことがわかっている．

トゥラエフ-ビロ不変量の位相不変性を導く際に使われた量子 6 j 記号の

満たすべき性質は公理化されている．この公理をみたす図5のような関数があればそれを用いて3次元多様体の位相不変量および(2+1)次元位相的量子場の理論を単体分割を経由して構成することができる．その公理を満たす例は作用素環論の観点から河東泰之らによってたくさん構成されている．特に最近，リー環に由来しない例が浅枝雅子とハーゲラップ(Haagerup)により与えられたが，この量子6j記号から作られる3次元多様体の不変量は，トゥラエフ-ビロ不変量と本質的に異なることが期待されている．

3次元コホモロジー類 α が自明な場合のダイグラーフ-ウィッテン不変量の値は，基本群の有限群 G への表現の個数を数えることによって計算される．したがって，その値を具体的に決定しようという問題は，古くから有限群論にある「群の準同型写像の個数をかぞえる」という問題に帰着される．この問題は吉田知行らによって研究がすすめられており，その結果ダイグラーフ-ウィッテン不変量のとりうる値に大きな制限がつくことが予想されている．

8章

3次元多様体の量子不変量の位相的な性質

本章では第6章と第7章で紹介された，3次元多様体の量子不変量の位相的な性質を紹介したい．第2章で，絡み目の多項式不変量の位相的な性質がいくつか述べられているが，3次元多様体の不変量に関しても状況はよく似ている．つまり，特定の値についての散発的な結果しか分かっていない．唯一の例外はキャッソン不変量との関係であり，これは，少なくともすべての量子 $SU(n)$ 不変量には共通に現れるものである．

8・1　3次元多様体のホモロジーと絡み形式

この節では，3次元多様体についての古典的な不変量である，ホモロジー群(序章も参照されたい)と絡み形式について簡単に復習しておく．

まず，どの頂点においても「入る辺の数－出る辺の数」が n の倍数であるような，各辺に向きのついたグラフのことを，n **を法とする閉曲線**と呼ぶことにする(図1参照)．また，各辺にぐるりと回る向きのついた三角形を辺同士で貼り合わせた図形を考える．ただし，辺の貼り合わせ方は，図2のように，貼り合わせる部分で(上向きの辺の数－下向きの辺の数 $=n$ の倍数)になっているものとする．貼り合わされていない辺も許してできた図形のことを n **を法とする曲面**と呼ぶ．どの辺も必ず他の辺と貼り合わされていると

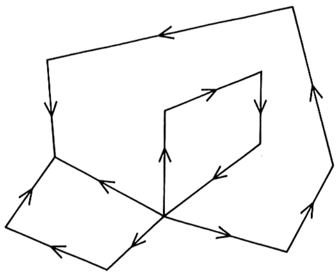


図1　3を法とする閉曲線

きは n **を法とする閉曲面**と呼ぶ．$n=0$ のときは，普通の閉曲線，曲面，閉曲面の概念と一致することを確認していただきたい．

3次元多様体 M の中の n を法とする閉曲線の $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ (n を法とした整数のなすアーベル群，$n=0$ のときは，整数のなすアーベル群)上の1次結合のことを(n を法とする)**1-サイクル**と呼ぶ．1-サイクル全体には1次結合で用いられた係数の足し算を使って，アーベル群の構造が入る．また，2つの1-サ

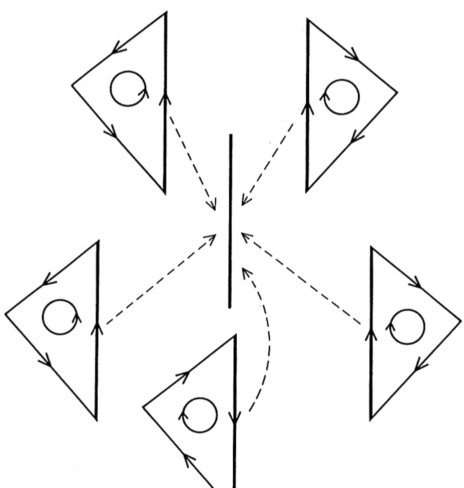


図2　太線の部分を貼り合わせる($n=3$)

イクルは曲面の境界になっているとき同値であることにする．1-サイクル全体をこの同値関係で割ったアーベル群を M の(n を法とする)**1次元ホモロジー群** $H_1(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ という．

同様に，M の中の n を法とする閉曲面の $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ 上の1次結合のことを **2-サイクル**と呼び，2つの2-サイクルは，いくつかの四面体の境界の1次結合になっているとき同値であるとする．2-サイクル全体をこの同値関係で割ったアーベル群が M の(n を法とする)**2次元ホモロジー群** $H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ である．

さて，アーベル群の基本定理により，$H_i(M;\boldsymbol{Z})$ $(i=1,2)$ は次のような直和に分解される．

$$H_i(M;\boldsymbol{Z}) \equiv \Bigl(\underbrace{\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}}_{b\text{個}}\Bigr)\oplus\Bigl(\bigoplus_{k=1}^{t}\boldsymbol{Z}/n_k\boldsymbol{Z}\Bigr)$$

この分解における，有限巡回群の部分 $\bigoplus_{k=1}^{t}\boldsymbol{Z}/n_k\boldsymbol{Z}$ を $H_i(M;\boldsymbol{Z})$ の **i 次元ねじれ部分群**といい $\mathrm{T}H_i(M)$ と書く．また，無限巡回群の部分 $\underbrace{\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}}_{b\text{個}}$ を $H_i(M;\boldsymbol{Z})$ の **i 次元ベッチ部分群**といい $\mathrm{B}H_i(M)$ と書く．その階数 b のことを M の **i 次元ベッチ数**という．

3次元多様体の1次元ねじれ部分群には，**絡み形式**と呼ばれる積 l : $\mathrm{T}H_1(M)\times\mathrm{T}H_1(M)\to\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ が次のように定義される．1-チェイン x,y を $\mathrm{T}H_1(M)$ の元とする．x は有限巡回群の元だから，$mx=0\in H_1(M;\boldsymbol{Z})$ となる整数 $m\neq 0$ が存在する．$mx=0$ であるから，ホモロジー群の定義から，mx を境界として持つ曲面 F が存在する．F,y には向きがついているので，これらの交点には次ページの図3のようにして符号がつく．すべての交点の符号まで込めた和のことを $\mathrm{Int}(F,y)$ と書くことにすると，絡み形式は

$$l(x,y)=\frac{\mathrm{Int}(F,y)}{m}\pmod{\boldsymbol{Z}}$$

によって定まる．ここで，mod $\boldsymbol{Z}$ とは，整数の差は無視するということである．

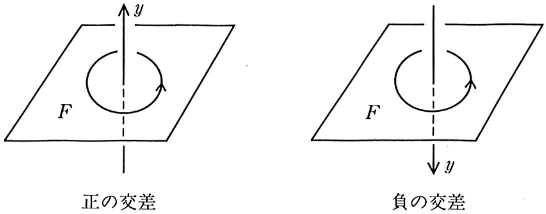


図3　F と y の交点

また，$H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ の元に対しては $I : H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\times H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\to H_1(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ という**交差形式**が次のように定義される．2-サイクル ξ,η を $H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ の元とする．ξ と η はいくつかの閉曲線(の1次結合)で交わるので，それを1-サイクルだと思うことによって $I(\xi,\eta)$ が定義される．同様に，1-サイクル x と 2-サイクル ξ は，向きのついた点で交わるので，その和によって $I : H_1(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\times H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\to \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ が定義される．また，これらを組み合わせることにより，**三重交差形式** $T : H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\times H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\times H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\to \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$ が定義される．

この節の最後に，絡み形式を枠付き絡み目の言葉で書いておこう．第6章の解説にあったように，m 次の絡み行列 A を持つ枠付き絡み目 $\mathcal{L}$ のデーン手術で3次元多様体 M が得られたとする．そのとき，$H_1(M;\boldsymbol{Z})$ は，アーベル群として生成元 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ と関係式 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)A=(0,0,\cdots,0)$ を持つ．また，行列式が ±1 であるような適当な行列 P を使って，${}^tPAP=\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix}$ (ただし，B は k 次正則行列)と変形すると，$\mathrm{T}H_1(M)$ は，生成元 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ と関係式 $(y_1, y_2, \cdots, y_k)B=(0,0,\cdots,0)$ を持つ．$\mathrm{T}H_1(M)$ の生成元 y_i, y_j に対し，絡み形式は $l(y_i, y_j)=B^{-1}$ の (i,j)-成分 $(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})$ で与えられることがわかる．

8・2　2次元ホモロジー群の元の定める被覆空間

n を法とする2次元ホモロジー群 $H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ の元 α が与えられたとき，M の n 重被覆空間 M_α が定義される．この節では，$n=2$ のときにこの構

成法を紹介しよう．

前節で述べたように，α は三角形を，向きを無視して貼り合わせてできる曲面の集まり $\mathscr{F}$ で表される．これは，普通の意味での($n=2$ であるから，向きがつかないかもしれない)閉曲面の集まりである．そこで M を $\mathscr{F}$ で切り開いたものを2つ用意して，これらを切れ目で貼り合わせたものが M_α である．これは，$\mathscr{F}$ の選び方によらないことが分かる．

これと同様に，n を法とする2次元ホモロジー群の元により n 重被覆空間が構成される(図2のような n 重に重なった部分の処理に注意)．

8・3　3次元多様体のスピン構造とロホリン不変量

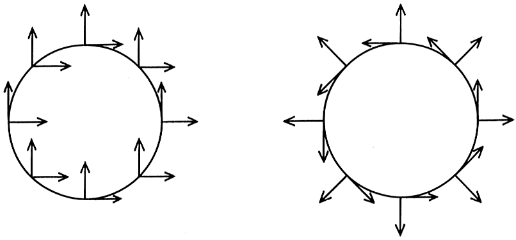
3次元多様体 M の**スピン構造**とは，M の各点(ただし，1点だけを除く)に3-枠(x-, y-, z-軸の指定)を与えることである．(第7章に出てきた2-枠の"2"とは意味が違う．)

スピン構造が与えられた M が，枠付き絡み目 $\mathscr{L}$ のデーン手術で与えられているとしよう(枠付き絡み目の"枠"とスピン構造の"3-枠"とは別)．M のスピン構造により $\mathscr{L}$ の管状近傍の境界 $\partial(N(\mathscr{L}))\cong S^1\times S^1$ 上に3-枠が決まる．この3-枠は(各 S^1 に2種類ずつ，図4参照)4種類あるが，手術するために使われるソリッドトーラス $(D^2\times S^1)$ に拡張されるものは2種類になる．これは，$\mathscr{L}$ の各成分のメリディアン $(S^1\cong\partial D^2)$ 上の3-枠が D^2 上に拡張されるかされないかで決まる．D^2 上に拡張されないような3-枠が与えられた $\mathscr{L}$ の成分を集めた部分絡み目を $\mathscr{K}$ と書くことにする．

また，$\mathscr{L}$ の各成分に曲面(ザイフェルト曲面)が張れるが，$\partial(N(\mathscr{L}))$ 上の3-枠は，この曲面上の3-枠の境界として現れることを考えると，$\mathscr{L}$ の各成分 $\mathscr{L}_i$ について

$$\mathrm{lk}(\mathscr{K},\mathscr{L}_i)\equiv\mathrm{lk}(\mathscr{L}_i,\mathscr{L}_i)\pmod 2 \tag{1}$$

が成り立っていることが分かる．($\mathrm{lk}(\mathscr{K},\mathscr{L}_i)$ は $\mathscr{K}$ と $\mathscr{L}_i$ の絡み数であり，$\mathrm{lk}(\mathscr{L}_i,\mathscr{L}_i)$ は第 i 成分の枠付けにより与えられる．また，左辺は $\mathscr{K}$ の各成分についての和である．) 逆に，(1)式が成り立つような部分絡み目 $\mathscr{K}$ を指



$S^1(\cong\partial D^2)$上の，D^2に拡張されるスピン構造

右向きが x-軸，
上向きが y-軸，
紙面の表向きが z-軸

$S^1(\cong\partial D^2)$上の，D^2に拡張されないスピン構造

中心から外に向かう矢印が x-軸，
接線方向が y-軸，
紙面の表向きが z-軸

図4　S^1の2つのスピン構造

定することにより，M のスピン構造が決定される．

さて，このようにして，スピン構造 θ が与えられたとき，次の量 $\mu(M,\theta)$ は3次元多様体とそのスピン構造の組 (M,θ) だけによることが，スピン構造も込めたカービーの定理を使って示される．

$$\mu(M,\theta)=\sigma(A)-\mathrm{lk}(\mathscr{K},\mathscr{K})+8\,\mathrm{Arf}(L)\pmod{16}\qquad(2)$$

ここで，L は $\mathscr{L}$ の枠付けを忘れたもの，A は $\mathscr{L}$ の絡み行列であり，$\sigma(A)$ はその符号数(正の固有値の数－負の固有値の数)である．また，$\mathrm{Arf}(L)$ は L のアルフ不変量（$V_L(\sqrt{-1})=2^{\#(L)-1}(-1)^{\mathrm{Arf}(L)}$ で特徴づけられる．第2章参照)である．

$\mu(M,\theta)$ は，じつはロホリン不変量と呼ばれるものであり，元々の定義は次のようなものである．M を境界に持つ4次元多様体で，M への制限が θ に一致するようなスピン構造を持つものを W とする．W の2次元ホモロジー群の交差形式の定める符号数の，16を法とする値を (M,θ) のロホリン不変量と呼び，その不変性はロホリンの定理により証明されていた．(2)式を使った証明は，カービーとメルビンによるものであり，量子 $SU(2)$ 不変量の1の4乗根の値を研究していて発見されたものである．逆にこの結果を使ってロホリンの定理の証明も与えられる．ロホリンの定理は，ドナルドソ

ン(Donaldson)によるゲージ理論の応用以前は，4次元多様体論においてもっとも重要な結果であった．それの別証明が，量子不変量の研究の途中(直接，量子不変量とは関係していないが)で出てきたのは興味深いことである．

8・4 キャッソン不変量

1985年の春にキャッソン(Casson)はMSRIにおけるセミナーで，整ホモロジー3球面($H_1(M;\boldsymbol{Z})=0$である閉3次元多様体)の，整数に値を持つまったく新しい不変量を定義した(ジョーンズによるジョーンズ多項式発見の直後)．これは，ある意味でロホリン不変量の整数版である(つまり，キャッソン不変量を8倍して，16を法としてみればロホリン不変量になる．整ホモロジー3球面にはスピン構造は1つしかないので，ロホリン不変量はただ1つしかない)．

一言で言ってしまえば，整ホモロジー3球面Mのキャッソン不変量$\lambda(M)$とは，その基本群$\pi_1(M)$からリー群$SU(2)$への準同型の個数である．もう少し詳しく説明すると次のようになる．第6章で説明されたように，任意の閉3次元多様体Mは，ヒーガード分解により2つのハンドル体H_1, H_2に分けられる．$F:=H_1\cap H_2$とおくと，これらの空間の基本群の間には次のような準同型があり，すべて全射である．

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(H_1) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(F) & & & & \pi_1(M) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \pi_1(H_2) & & \end{array}$$

$R(X)$で，$\pi_1(X)$から$SU(2)$への準同型全体のなす空間を表すことにすると，

$$\begin{array}{ccccc} & \swarrow & R(H_1) & \nwarrow & \\ R(F) & & & & R(M) \\ & \nwarrow & R(H_2) & \swarrow & \end{array}$$

という，すべて単射準同型からなる図式が得られる．つまり，$R(M)$ はある意味で，$R(F)$ という空間の中における，$R(H_1)$ と $R(H_2)$ の共通部分であるといえる．この共通部分は，じつは有限個の点における(符号付きの)交差であると考えられるため，その交差数(符号付きの和)としてキャッソン不変量が定義される．

この定義は $\mathrm{B}H_1(M)=\{0\}$ の場合(このとき，M は有理ホモロジー3球面といわれる)にも適用される(ウォーカー(Walker)による拡張)．ただし，この場合は有理数に値を持つ．そして，これとはまったく別の方法(枠付き絡み目を使ったもの)により，レスコップ(Lescop)がすべての閉3次元多様体に拡張した．この意味で，$\lambda(M)$ のことを，キャッソン-ウォーカー不変量とか，キャッソン-ウォーカー-レスコップ不変量と言ったりもする．

キャッソン不変量には，これまでさまざまな解釈がなされてきた．タウベス(Taubes)によるフレアーホモロジーのオイラー標数としての解釈，森田茂之による曲面の写像類群の2次的特性類からの解釈などである．本書に深く関わる解釈としては，大槻知忠による第1次有限型不変量(これは，定数倍を除いて一意的)としての捉え方がある(第9章参照)．

8・5　量子 $U(1)$ 不変量

前節までで定義した不変量と量子不変量の関係をいくつか紹介しよう．

まず，村上斉，大槻知忠，塩見(旧姓岡田)真枝による，量子 $U(1)$ 不変量について説明する．

閉3次元多様体 M が，m 成分の枠付き絡み目 $\mathcal{L}$ に関するデーン手術で与えられたとする．また，A を絡み行列とおく．自然数 N に対し，q を1の

原始 N 乗根（N が奇数のとき）または，1 の原始 $2N$ 乗根（N が偶数のとき）とする．そのとき，M の q に付随した量子 $U(1)$ 不変量 $\tau_N^{U(1)}(M;q)$ は，次の式で与えられる．

$$\tau_N^{U(1)}(M\,;\,q) = \left(\frac{G_N(q)}{|G_N(q)|}\right)^{-\sigma(A)} |G_N(q)|^{-m} \sum_{x\in(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})^m} q^{{}^t x A x} \qquad (3)$$

ここで，x は m 次の縦ベクトル，$G_N(q) = \sum_{j=0}^{N-1} q^{j^2}$（ガウス和）である．

$\tau_N^{U(1)}(M\,;\,q)$ が実際に 3 次元多様体の不変量になっていることの証明は比較的簡単である．第 6 章にあったように，同じ 3 次元多様体を与える枠付き絡み目はカービー移動(KI)，(KII)で移り合うので，上の式の右辺がカービー移動によって不変であることを確かめればよい．

2 つの正方行列が，次の変形で移り合うとき**安定同値**であるという．

$$\begin{cases} A \longleftrightarrow {}^t PAP & (\det P = \pm 1) \\ A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A & O \\ O & \pm 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

さて，第 8・1 節で説明したように，M の絡み形式は A のみによって決まる．この意味で，$\boldsymbol{Z}$ 上の対称行列が絡み形式を決めるといってよい．また，安定同値な行列が同値な絡み形式を決めるのは容易に分かる．じつは，この逆も正しいことが知られている．つまり，2 つの対称行列が同型なアーベル群を定義し，さらに，ねじれ部分群における絡み形式が同値なら，それらは安定同値であることがわかる．

この結果と，$\tau_N^{U(1)}(M;q)$ が絡み行列の安定同値によって不変であることを使うと，結局，$U(1)$ 不変量は M の 1 次元ベッチ数と $\mathrm{T}H_1(M)$ 上の絡み形式で完全に決定されることがわかる．特に，これは，ホモトピー不変量である．

また，$\tau_N^{U(1)}(M;q)$ の絶対値については，$H_2(M;\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ の元 α で，$\mathrm{T}(\alpha, \alpha, \alpha) \neq 0$ をみたすものが存在するときは，$|\tau_N^{U(1)}(M;q)| = 0$，それ以外のときは，$|\tau_N^{U(1)}(M;q)| = \sqrt{|H_2(M;\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})|}$ であることがわかる．（T は第 8・1 節で定義した三重交差形式．また，この結果は，カービーとメルビンによる

$n=2$ の場合の拡張である.)

この不変量については, $U(1)$ ゲージ理論の観点から牛腸徹によっても調べられている. また, 第7章にあったように, 有限巡回群の場合のダイグラーフ-ウィッテン不変量は $U(1)$ 不変量により記述される.

8・6　$SU(n)$ 不変量の分解

第6章の解説にあったように $SU(n)$ 不変量はいくつかの不変量に分解されることがある. この節では, その分解について説明し, 次の節で各分解に現れる不変量の位相的な性質を紹介する. $\tau_r^{SU(n)}(M;q)$ で, 1の r 乗根 q に付随した, M の量子 $SU(n)$ 不変量を表す.

まず, r と n が互いに素なとき, 次のように $SU(n)$ 不変量は $U(1)$ 不変量と $PSU(n)$ 不変量に分解することが河野俊丈と高田敏恵によって示された($n=2$ のときはカービーとメルビン).

$$\tau_r^{SU(n)}(M;q)=\tau_n^{U(1)}(M;q')\,\tau_r^{PSU(n)}(M;q)$$

ここで, q' は適当な1の冪根である. この式と, $U(1)$ 不変量はしばしば0になるという前節の結果から, $PSU(n)$ 不変量の方が $SU(n)$ 不変量より真に強いことがわかる. また, $U(1)$ 不変量は(絡み形式も含めた)ホモロジー群から決定されたので「よく分かる」ことにすると, $PSU(n)$ 不変量が分かれば $SU(n)$ 不変量も分かることになる.

次に, $SU(n)$ 不変量の, 和による分解を2つ紹介する. いずれも, 3次元多様体にある種の構造を入れて, この構造に対応した $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の表現を足しあげることによって定義される(第6章参照). これらはともに, $n=2$ のとき, カービーとメルビンにより与えられたものであり, それ以外は村上斉によるものである.

まず, M の, n を法とした2次元ホモロジー群 $H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ の元による分解を紹介しよう. $r\equiv 0 \pmod{n}$ (n が奇数)あるいは $r\equiv n \pmod{2n}$ (n が偶数)のとき, $\alpha\in H_2(M;\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$ に対して, $\tau_r^{SU(n)}(M,\alpha;q)$ が定義されて, 組 (M,α) についての不変量となる. また, これらを α に関してすべて足し

あげたものは，$\tau_r^{SU(n)}(M;q)$ に一致する．

次に，n を法としたスピン構造による分解がある．ただし，n を法としたスピン構造は n が偶数のときのみ定義され，

$$\mathrm{lk}(\mathcal{K}, \mathcal{L}_i) \equiv \frac{n}{2}\mathrm{lk}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_i) \pmod n \tag{4}$$

をみたすような $\mathcal{L}$ の成分の1次結合 $\mathcal{K}$ と同一視されるものである．$n=2$ のときは第3節で定義したスピン構造と一致する．さて，n が偶数で，$r \equiv 0 \pmod{2n}$ としよう．M に n を法としたスピン構造 θ が与えられたとき，上と同様に $\tau_r^{SU(n)}(M, \theta;q)$ が定義されて，これらをすべてのスピン構造にわたって足しあげると，$SU(n)$ 不変量になることがわかる．

8・7 $SU(n)$ 不変量の位相的な性質

前節で定義された，(ある意味で精密化された)3次元多様体の量子 $SU(n)$ 不変量の位相的な性質は，$U(1)$ の場合と違ってよく分かっていない．ただし，いくつかの場合には，今までに定義した不変量との関係が分かっている．

まず，1の $n+1$ 乗根に付随した量子 $PSU(n)$ 不変量は，つねに1になることがわかるので，第5節と(4)式により，ホモロジーの言葉で記述されることがわかる．

1の4乗根に付随した量子 $SU(2)$ 不変量については，前節によりスピン構造に対して不変量が定義される．そして，その各々の値はロホリン不変量によって，完全に決定されることが，カービーとメルビンによって示された．

また，1の6乗根のときは，2を法とした2次元ホモロジー群の元 α に対して $SU(2)$ 不変量が定義されるのであるが，その値は，M の，3を法とした1次元ホモロジー群，および α により定義される2重被覆空間の，3を法とした2次元ホモロジー群などを用いて表されることが，カービー-メルビン-チャン(Zhang)によって示された．

これと同様のことが，1の6乗根に付随した量子 $SU(3)$ 不変量でも成り

立つことが村上斉により示された．つまり，$\tau_6^{SU(3)}(M,\alpha;q)$ $(\alpha\in H_2(M;\boldsymbol{Z}/3\boldsymbol{Z}))$ は，M の2次元ベッチ数 α により定義される3重被覆空間の，2を法とした2次元ホモロジー群などによって決定される．

本章を終えるにあたって，キャッソン不変量と量子 $SO(3)(=PSU(2))$ 不変量の関係を述べておこう．r が奇素数のとき $\tau_r^{SO(3)}(M;q)$ は $\boldsymbol{Z}[q]$ (q の多項式全体のなす環)に入っていることが村上斉によって示された．不変量の定義式に割り算が入っているため，$\boldsymbol{Z}[q]$ の商体である $\boldsymbol{Q}(q)$ に含まれる可能性があり，これは当たり前のことではない(第6章参照)．また，これと同様の性質は $PSU(n)$ 不変量についても正しいことが，マスバウム(Masbaum)-ウェンツェル，高田敏恵-横田佳之によって示されている．したがって，$\tau_r^{SO(3)}(M;q)$ を $q-1$ について昇冪の順に並べることができる．つまり，

$$
\begin{aligned}
&\tau_r^{SO(3)}(M;q)\\
&\quad = a_{r,0}(M)+a_{r,1}(M)(q-1)+a_{r,2}(M)(q-1)^2+\cdots\\
&\qquad + a_{r,r-2}(M)(q-1)^{r-2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる($q^{r-1}+q^{r-2}+\cdots+q+1=0$ に注意)．この式において，特に M が整ホモロジー3球面のとき，

$$
\begin{aligned}
a_{r,0}(M) &\equiv 1 &&\pmod r\\
a_{r,1}(M) &\equiv 6\lambda(M) &&\pmod r
\end{aligned}
$$

であることも同時に村上斉によって示された．(有理ホモロジー3球面のときも同様の結果が成り立つ．また，これは，ある種の3次元多様体の族の，1の5乗根での値に関して，カービーとメルビンにより得られていたものの拡張である．) つまり，r をすべての奇素数にわたって動かすとき，量子 $SO(3)$ 不変量はキャッソン-ウォーカー不変量を決定することがわかる．

また，M が有理ホモロジー3球面のとき，大槻知忠によって(5)式から r によらない不変量(大槻不変量)が抽出された．つまり，次のような(有理数に値を持つ不変量を係数とする) $t-1$ の形式的冪級数に値を持つ不変量の存在が示されたのである．

$$\tau(M)=\lambda_0(M)+\lambda_1(M)(t-1)+\lambda_2(M)(t-1)^2+\cdots \qquad (6)$$

そして，荒っぽく言えば (6) 式において $t=q$ とおけば (5) 式が得られるのである．これは，逆に $\tau(M)=\lim_{r\to\infty}\tau_r^{SO(3)}(M\,;\,q)$ とも言える．特に，M が整ホモロジー 3 球面のときは，

$$\lambda_0(M)=1$$

$$\lambda_1(M)=6\lambda(M)$$

が成り立つ．

(6) 式に現れる各係数(すべて不変量！)を統一的に見る方法(有限型不変量；これも大槻不変量と呼ばれる．より正確には大槻型不変量)については，次章を参照されたい．また，最近レー(Le)により，同様の結果が $PSU(n)$ 不変量についても成り立つことが証明された(ロザンスキー(Rozansky)も物理的観点から同様の考察をしている)．

最後に，近年，葉広和夫によって，3 次元多様体にもクラスパー理論が展開されていることを注意しておこう．これはおおざっぱに言って，3 次元多様体全体を，ある種の手術によって移り合うものにより分類しようという考え方である．これにより，たとえば「同じ有限型不変量を持つ多様体」という族が幾何的な意味を持つようになったのである(第 9 章参照)．

9章

量子不変量の統一的理解へ

1980年代に結び目の新しい不変量が多数発見され，結び目の不変量の研究はこの時期を転機に大いに発展することになった．新不変量の流れの発端は80年代なかばに作用素環を用いてジョーンズ多項式が発見されたことで，その後，統計力学のヤン-バクスター方程式の解などを用いて「輪切り方式(第1章参照)」により多くの不変量が構成された．この構成法の特徴は，各部分に交点が1つしかなくなるくらいに結び目を細かく分割し，数種類の単位部分がいくつも貼り合わさった合併としてもとの結び目を理解しよう，という視点である．つまり「結ばっている」という現象そのものを要素とする集合の代数的構造をしらべる，というアプローチがこの時期によく用いられる手法になった．

さてこの時期はまた，20世紀初めにおこった量子論が，理論的にも整備され，幾何学にさまざまな影響を与えつつある時期でもあった．とくに結び目理論との関連では2次元の共形場理論が重要で，ここでは2次元世界をとびまわる点粒子の時間発展の様子として結び目がとらえられる．このときこの点粒子(の時間発展)の状態を記述する相関関数が結び目の不変量を導く．80年代後半に輪切り方式によって得られた多数の不変量は，このような量子論の視点から，量子群やKZ方程式を用いて量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量(ここで $\mathfrak{g}$ はリ

ー環で R はその表現)として組織的に再構成されることになった．また(単なる再構成のみならず)その結果として我々はじつに多くの(リー環とその表現の数くらいの！)不変量を得るにいたったのである．

膨大な数の量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量を統一的に理解しようとするうごきとして，共通の性質で量子不変量をくくってしらべるというバシリエフ不変量(第3章参照)と単一の不変量によって量子不変量を統一するというコンツェビッチ不変量(第5章と本章を参照)があった．

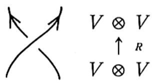
さて，量子論において相関関数を経路の全体という無限次元空間上の積分(経路積分)により表示するという手法が20世紀なかばに量子電磁気学で成功をおさめていたが，80年代のおわりにウィッテンは(結び目をふくむ) 3次元多様体の位相型のみに本質的に依存する場の量子論を考え，このときの(経路積分で表示された)相関関数が(結び目をふくむ) 3次元多様体の位相不変量になることを主張した．従来知られていた結び目の量子不変量はウィッテンの提唱した不変量の特別な場合(3次元多様体が3次元球面の場合)として理解される．このウィッテンの不変量は無限次元空間上の積分という数学的にまだ正当化されていない方法で与えられているが，3次元多様体の不変量そのものは経路積分による表示が予言する性質にもとづいていろいろな組合せ的手法で数学的に厳密に再構成され，3次元多様体の量子不変量とよばれて現在活発に研究されている(第6章以降を参照)．

本章は全体のまとめとして，量子不変量以降の結び目の不変量の発展をあらためて概観しつつ，3次元多様体の量子不変量(と摂動的不変量)をよりよく理解するためにそれと平行した動機で導入されてきた3次元多様体の有限型不変量，普遍摂動的不変量に話をすすめたい．

9・1 量子不変量をめぐる結び目の不変量

ヤン-バクスター方程式の解による結び目不変量

ジョーンズ多項式を契機として80年代後半に輪切り方式(第1章)によって多数の結び目不変量が構成された．輪切り方式では結び目のひもにベクトル空間 V を対応させ交点には下図のように $V\otimes V$ から $V\otimes V$ への R 行列とよばれる線型写像 R を対応させる．



R 行列を用いて結び目の不変量をつくろうとしたときのポイントは「R 行列の合成がライデマイスター移動(第2章参照)で不変になる」という要請で，中でもライデマイスター移動 RIII



が重要であった．RIII に対する不変性を R 行列のことばでかき直すと

$$(R\otimes \mathrm{id}_V)\cdot(\mathrm{id}_V\otimes R)\cdot(R\otimes \mathrm{id}_V)$$
$$= (\mathrm{id}_V\otimes R)\cdot(R\otimes \mathrm{id}_V)\cdot(\mathrm{id}_V\otimes R)$$

という $V\otimes V\otimes V$ から $V\otimes V\otimes V$ への線型写像の方程式になるが，この方程式はヤン-バクスター方程式とよばれ，その解は R 行列とよばれた．さらに R 行列を成分でかき直すとヤン-バクスター方程式は3次方程式からなる連立方程式にかき直され，その連立方程式をめのこで解くことによっても R 行列を具体的にえることができる．R 行列を1つ与えると(他にも若干ゆるい条件はあるが)輪切り方式や組みひも群の表現を用いて結び目不変量が1つできる，というのがポイントである．

歴史的には統計力学における格子模型が可解であるための条件がヤン-バクスター方程式であった(第4章)．可解格子模型をあたえる多数の R 行列

が当時統計力学において知られていたが，それらの R 行列を用いて 1980 年代後半に多数の結び目不変量が構成された．

結び目の量子不変量

リー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 V_1, V_2 について，それらの表現を展開することにより包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の表現がえられ，さらにそれを複素パラメータ q で変形する（すなわち「量子化」する）ことにより量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現がえられる（序章参照）．この表現も V_1, V_2 とかくことにする．

リー環のテンソル表現について成分をいれかえる線型写像 $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ は $\mathfrak{g}$ 作用に関するインターートワイナー（第5章参照）であったが，これを「量子化」してえられる $U_q(\mathfrak{g})$ 作用に関するインターートワイナー

$$R_{V_1,V_2} : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_2 \otimes V_1$$

は複素パラメータ q を含む線型写像になった（しかもこの線型写像は $q \neq 1$ では成分いれかえ写像とは異なる写像になる）．さらにこのインターートワイナーは（とくに $V = V_1 = V_2$ のとき）ヤン-バクスター方程式の解すなわち R 行列になることがわかった（第5章参照）．前述のように，R 行列があると結び目不変量が1つできる．

そこでリー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 R を与えるごとに結び目 K の不変量が定義されることになるが，これを量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量 $Q^{\mathfrak{g},R}(K)$ とよんだ．各結び目 K について $Q^{\mathfrak{g},R}(K)$ は変数 $q^{\pm 1}$ の整係数多項式である．

すべてのリー環とそのすべての表現は代数的に分類され，それらは整理されて系列化されている．1980 年代に統計力学に由来する多数の R 行列を用いて散発的にえられていた多数の結び目不変量は，1980 年代末に量子不変量として系列化され，我々はそれらの不変量を整理して理解できるようになった．

量子群の背景にあるのは2次元の共形場理論という物理理論で，物理的には2次元空間を粒子がとびまわっているような世界を想定している．その世界における粒子の運動を量子論的に記述するとき，時間をとめたある状態に

ベクトル空間が対応し，時間発展による状態の変化にベクトル空間の間の線型写像が対応する．2 次元空間の粒子の運動の時間発展のようすを時間を縦軸にとって 3 次元的に描写すると組みひもになる(図 1)．そこで組みひもにたいして線型写像が対応することになる．さらに今の場合，理論が共形不変であるので，すなわちその線型写像がある意味でもとの 2 次元空間の長さに依存しないので，その線型写像は組みひもの(両端を固定した)イソトピーで不変になり，その結果我々は結び目の不変量をえることができる．

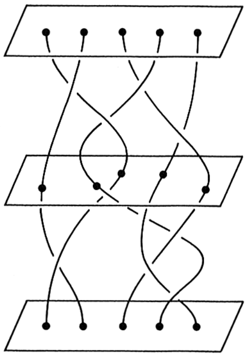


図 1 道 $\gamma:[0,1] \to X_n$ は組みひもを表す．

KZ 方程式のモノドロミーによる量子不変量の構成

複素平面内の n 点の配置の空間を X_n とおく．すなわち

$$\begin{aligned} X_n &= \{\boldsymbol{C} \text{ の異なる } n \text{ 点の集合の全体}\} \\ &= \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n \mid \text{各 } i \neq j \text{ について } z_i \neq z_j\}. \end{aligned}$$

配置空間 X_n の基点 $x_0 \in X_n$ を 1 つ固定する．基点 x_0 を始点と終点にする X_n の道 $\gamma:[0,1] \to X_n$ (ただし $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$) は(純な)組みひもを表す(図 1)．さらに対称群 $\mathfrak{S}_n$ で X_n をわった空間 $X_n/\mathfrak{S}_n$ の道が一般の組みひもを表すが，以下では簡単のため($X_n/\mathfrak{S}_n$ ではなく) X_n について話をすすめる．

前に述べた量子群による量子不変量の構成においては，R 行列という X_n

全体からみると局所的な変化に対応するデータを貼り合わせて結び目不変量が構成されていた．2次元共形場理論において粒子の相互作用を表す相関関数 $W: X_n \to V^{\otimes n}$(ここで V はリー環 $\mathfrak{g}$ の表現)の構成においても，当初は，頂点作用素という局所的なデータをはりあわせることによって X_n 上のさまざまな部分集合上で相関関数が構成されていた[1)]．クニズニク(Knizhnik)とザモロチコフ(Zamolodchikov)はそのようにして導かれたすべての相関関数が X_n 上大域的にみたす微分方程式(**KZ方程式**とよばれる)を導いた．その方程式は全微分方程式の形で

$$dW = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{i,j}\omega_{i,j}Wd\log(z_i - z_j) \tag{1}$$

のように表される．ここで h は $\log q$ に対応する複素パラメータで $w_{i,j}$ はキリング形式の双対元という特別な $U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ の元を $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ の第 i, j 成分にいれることによりえられる $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ の元である．

一般に「n 次元空間 X_n 上の関数 W についての全微分方程式 $dW = \cdots$ を与える」ということは「X_n の各点について W のグラフの(n 次元)接平面を指定する」ということを意味する．仮りに X_n が1次元であったとすると，与えられた直線族をいっせいに接線にもつようなグラフがその微分方程式の解を表し，そのようなグラフはその直線族の積分曲線としてえられる．X_n が2次元以上の場合はあらかじめ与えられた平面族をいっせいに接平面にもつようなグラフがその微分方程式の解を表すが，一般にそのようなグラフはいつでも存在するとはかぎらない．そのようなグラフが存在するためにもとの微分方程式がみたすべき条件が具体的に知られており，その条件は**可積分条件**とよばれる．KZ方程式はこの可積分条件をみたす．よって，X_n の任意の点と任意の初期値について，その点でその初期値をもつKZ方程式の局所解(その点の近傍における解)が一意に存在することがわかる．

1）頂点作用素を貼り合わせることによりたとえば部分集合 $\{0 < |z_{i_1}| < |z_{i_2}| < \cdots < |z_{i_n}|\}$ 上で相関関数が定義され，それを X_n 全体に解析接続して拡張することにより X_n 上の相関関数(それらは出発点の部分集合によらず互いに等しい)がえられていた．

基点 x_0 を始点と終点とする X_n の道 γ をとってきて，また $v \in V^{\otimes n}$ を任意に固定する．v を初期値とするような KZ 方程式の局所解を x_0 のまわりで考える(KZ 方程式の可積分性よりそれは一意に存在する)．さらに道 γ にそってその局所解を次々に拡張していくと道 γ にそった KZ 方程式の解がえられるが，その解にそって γ をもちあげることにより，v を始点とする $V^{\otimes n}$ の道 f がえられる．f の終点を v' とおく(図 2 参照)．図 2 のように相関関数 W はじつは X_n 全体では多価関数としてしか定まらないということがポイントで，一般に v' は v と異なる元になる．道 γ に対して(すなわち，図 1 の意味で道 γ に対応する組みひもに対して) $V^{\otimes n}$ から $V^{\otimes n}$ への線型写像 $v \mapsto v'$ がえられたことになる．この線型写像を γ の**モノドロミー**とよぶ．この線型写像は道 γ の局所変形によらない(したがって，対応する組みひものイソトピーによらない)ことに注意すると，モノドロミーによって組みひも群の($\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ に値をもつ)表現がえられたことになる．これを KZ 方程式の解にそった組みひも群の**モノドロミー表現**とよぶ．

河野俊丈は多くのリー環について KZ 方程式のモノドロミーからえられる組みひも群の表現が量子群からえられる組みひも群の表現と同値な表現であることを指摘してそれを証明し，さらにドリンフェルトは準ホップ代数の概

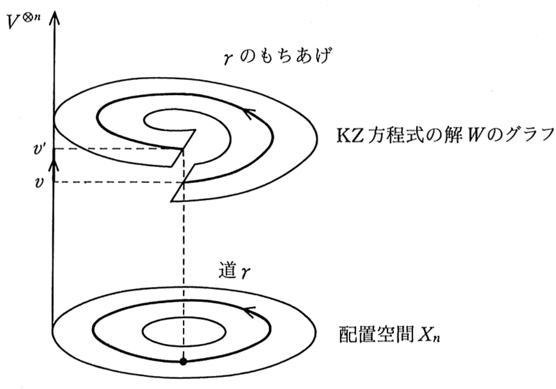


図 2 KZ 方程式の解 W のモノドロミー

念を導入してその変形理論を構築することによりその他の(つまりすべての)リー環についてもそれらの表現が互いに同値であることを証明した(河野-ドリンフェルトの定理)．これにより量子群によって構成されたすべての量子不変量はKZ方程式の解のモノドロミーを用いて再構成されたことになる．

結び目の普遍量子不変量(コンツェビッチ不変量)

配置空間 X_n の道 $\gamma:[0,1]\to X_n$ について $\gamma(t)=(z_1(t),\cdots,z_n(t))\in X_n$ とおく．図2でえられた $V^{\otimes n}$ の道 f はKZ方程式の解 W を用いて局所的に $f(t)=W(\gamma(t))$ と表されることに注意すると，合成関数の微分を計算することによって，f のみたすべき微分方程式は

$$\frac{df}{dt}=w(t)f$$

となることがわかる．ここで $w(t)$ は

$$w(t)=\frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\sum w_{i,j}\frac{d}{dt}\log(z_i(t)-z_j(t)) \qquad (2)$$

で定められる関数である．さらに初期値 $f(0)=v$ に対する上の微分方程式の解は反復積分

$$f(t)=\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0\leqq t_1\leqq\cdots\leqq t_m\leqq t}w(t_1)\cdots w(t_m)\,dt_1\cdots dt_m\right)v$$

で表されることが簡単な計算[2)]で確かめられる．すなわち v を v'(つまり $f(1)$)にうつす線型写像は $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ の元として

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0\leqq t_1\leqq\cdots\leqq t_m\leqq 1}w(t_1)\cdots w(t_m)\,dt_1\cdots dt_m \qquad (3)$$

のように表されることになる．すなわち道 γ に対応する組みひもに対して上式(3)を対応させることにより組みひも群の($U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ に値をもつ)モノドロミー表現がえられることになる．前述のようにその表現が量子不変量を再構成していた．

2）一般に，任意の積分可能な関数 $g(t)$ と定数 a について $\frac{d}{dt}\int_a^t g(s)\,ds=g(t)$ が成立することを使うとよい．

コンツェビッチはKZ方程式をリー環と表現によらない普遍的な形に書き直し，普遍化したKZ方程式のモノドロミー表現を用いて結び目の不変量(コンツェビッチ不変量)を以下のように構成した．それを説明するためにまず用語を用意する．S^1 上のコード図の定義(第3章参照)と同様に，n 本のたて線 $\uparrow\uparrow\cdots\uparrow$ にコードをかき加えることによってえられる図形を $\uparrow\uparrow\cdots\uparrow$ 上の**コード図**という．$\uparrow\uparrow\cdots\uparrow$ 上のコード図がはるベクトル空間を4項関係式(第3章参照)でわった空間を $\mathscr{A}(\uparrow\uparrow\cdots\uparrow)$ とかく．$w_{i,j}$ を i 番目の $\uparrow$ と j 番目の $\uparrow$ をコードでむすんだコード図に対応する $\mathscr{A}(\uparrow\uparrow\cdots\uparrow)$ の元として，その $w_{i,j}$ についてあらためて相関関数 $W: X_n \to \mathscr{A}(\uparrow\uparrow\cdots\uparrow)$ に対する全微分方程式を(1)と同じ式で定める．これを**普遍KZ方程式**とよぶ．普遍KZ方程式における可積分条件が4項関係式から導かれ，普遍KZ方程式についても前と同様の議論が可能になることがわかる．今の場合の結論は，コード図で定義された上の $w_{i,j}$ について(2)と同じ式で $w(t)$ を定めると，その $w(t)$ を用いた反復積分(3)により $\mathscr{A}(\uparrow\uparrow\cdots\uparrow)$ の元が定まるが，これが普遍KZ方程式の解のモノドロミーによる組みひも群の表現(今の場合は $\mathscr{A}(\uparrow\uparrow\cdots\uparrow)$ に値をとる)を与えることがわかる．コンツェビッチは組みひもに対して定まる今の場合の反復積分(3)を用いて結び目 K の不変量 $Z(K) \in \mathscr{A}(S^1)$ (**コンツェビッチ不変量**とよばれる)を定義した．

ウェブ図

第3章で導入されたコード図における「コード」に3価頂点を追加した対象であるウェブ図を導入する．S^1 上の**ウェブ図**とは S^1 上に端点をもつような1,3価グラフで，各3価頂点のまわりの3つの辺に円順序がはいっているようなものである(図3参照)．S^1 上のウェブ図がはる $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間をAS, IHX, STU関係式(図4参照)でわってできる空間を $\mathscr{A}(S^1)$ とかく．ウェブ図 D について，その1,3価頂点の個数の半分を D の次数という．次数が d のウェブ図のはる $\mathscr{A}(S^1)$ の部分空間を $\mathscr{A}(S^1)^{(d)}$ とかく．

与えられたウェブ図について，その各3価頂点をSTU関係式で展開する

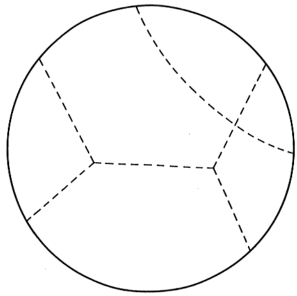


図 3　S^1 上のウェブ図の例

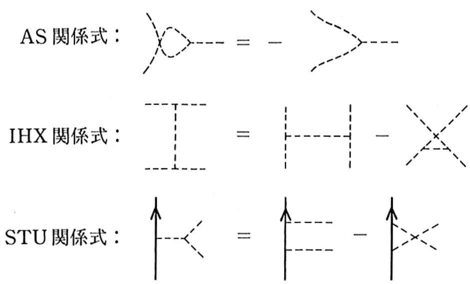
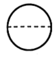
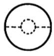


図 4　AS, IHX, STU 関係式

と 3 価頂点のないウェブ図(つまりコード図)になる．この対応により $\mathscr{A}(S^1)$ はコード図のはるベクトル空間を 4 項関係式(第 3 章参照)でわった空間と自然に同型になり，ウェブ図は実質的にコード図と同値な対象であることがわかる．

上で定義されたコンツェビッチ不変量 $\hat{Z}(K)$ は[3]

$\hat{Z}(K) = \exp\Big(a_1$  $+ a_2$  $+ a_3$  $+ \cdots \Big),$

のように表される．ここで右辺の各項の係数はそれぞれが結び目の不変量であり，たとえば，a_1 は K の枠の 1/2 倍で，a_2 はコンウェイ多項式([村杉]を参照)の 2 次の係数に等しい．

一般に $\hat{Z}(K)$ はウェブ(点線部分)が連結であるようなウェブ図の 1 次結

合の指数関数で表される．これは，$\mathscr{A}(S^1)$ に自然にはいるホップ代数構造に関して $\hat{Z}(K)$ の値はつねに「群的」であるためである．すなわち，ホップ代数の一般論により「群的」な元は「原始的」な元(今の場合，ウェブが連結であるようなウェブ図の1次結合)の指数関数で表すことができるからである．

量子不変量にたいするコンツェビッチ不変量の普遍性

コード図 D についてその点線にリー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式の双対元，コード図の実線に $\mathfrak{g}$ の表現 R を対応させることにより数 $W_{\mathfrak{g},R}(D)$ が定義される(詳しくは [村杉] 参照)．さらに $\hat{W}_{\mathfrak{g},R}(D) = W_{\mathfrak{g},R}(D)\,h^{D\text{の次数}}$ とおくことにより写像 $\hat{W}_{\mathfrak{g},R}$：$\mathscr{A}(S^1) \to \boldsymbol{C}[[h]]$ が定義される．ここで h は $q = e^h$ (q は量子不変量の変数)となる変数である．これらの写像 $W_{\mathfrak{g},R}$ や $\hat{W}_{\mathfrak{g},R}$ をリー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 R をコード図に代入することによりえられる**重み系**とよぶ．

コンツェビッチ不変量のそもそもの由来は，KZ 方程式の解のモノドロミーを用いた量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量の再構成においてリー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式の双対元をコード図の点線に，$\mathfrak{g}$ の表現 R をコード図の実線に普遍化して得られる不変量であった．したがってコンツェビッチ不変量は重み系 $\hat{W}_{\mathfrak{g},R}$ によってすべての量子不変量を復元することがわかる．すなわち，

定理1　結び目 K のコンツェビッチ不変量 $\hat{Z}(K)$ はすべての量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量 $Q^{\mathfrak{g},R}(K)$ にたいして普遍的である．

定理1における「普遍的」とは次のような意味である．すなわち，任意のリー環 $\mathfrak{g}$ とその表現 R について量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量 $Q^{\mathfrak{g},R}(\cdot)$ は重み系 $W_{\mathfrak{g},R}$ を用いて次の合成写像

3)　正確には，ここでいう $\hat{Z}(K)$ はレー-村上順によって再定義された「補正コンツェビッチ不変量」である．

$$Q^{\mathfrak{g},R}(\cdot)\,|_{q=e^h}:\{\text{結び目}\}\xrightarrow{\hat{Z}}\mathscr{A}(S^1)\xrightarrow{\hat{W}_{\mathfrak{g},R}}\boldsymbol{C}[[h]]$$

で表される．ここで重み系 $\hat{W}_{\mathfrak{g},R}$ は絡み目によらず $\mathfrak{g}$ と R のみできまる写像であることがポイントである．つまり，量子不変量における結び目の不変量としての情報はコンツェビッチ不変量に集約されていることになる．

結び目の有限型不変量(バシリエフ不変量)

第3章で紹介されたバシリエフ不変量についてここでは若干異なる方法で定式化する．結び目全体がはる $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間を $\mathscr{K}$ とおく．結び目 K と K のいくつかの交点の集合 C について，C のすべての部分集合 C' に関する交代和

$$[K,C]=\sum_{C'\subset C}(-1)^{C'\text{の交点の個数}}K_{C'}$$

を考える．ここで $K_{C'}$ とは K において C' の交点の上下をいれかえて得られる結び目である(図5参照)．与えられた非負整数 d について，任意の結び目 K と K の任意の d 個の交点の集合 C について $[K,C]$ がはる $\mathscr{K}$ の部分ベクトル空間を $\mathscr{K}_d$ とおく．$\mathscr{K}_{d+1}$ 上で0になるような線型写像 $v:\mathscr{K}\to\boldsymbol{C}$ のことを d 次の**有限型不変量(バシリエフ不変量)**という．

結び目 K とその交点の集合 C について，C の各交点をコード図におきかえて得られるコード図に対して $[K,C]$ を対応させることにより，次の自然な線型写像

$$\varphi:\mathscr{A}(S^1)^{(d)}\longrightarrow\mathscr{K}_d/\mathscr{K}_{d+1}$$

が得られる．ウェブ図に対しての φ による像は，図6のようにクラスパー[4)]

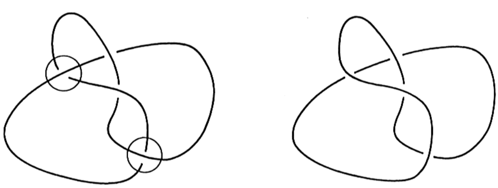


図5　結び目 K とそのいくつかの交点の集合 C (左図)と左図の K, C についての K_C (右図)

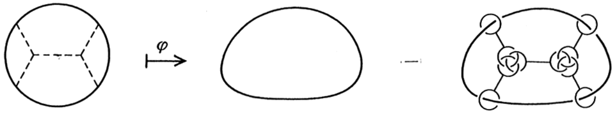


図 6　ウェブ図の φ による像のクラスパーを用いた表示



図 7　クラスパーの定義

(定義は図 6 参照)で与えられる.

有限型不変量にたいするコンツェビッチ不変量の普遍性

定理 2(コンツェビッチ)　コンツェビッチ不変量 $\hat{Z}$ はすべてのバシリエフ不変量にたいして普遍的である.

定理 2 の「普遍的」とは次のような意味である. すなわち, 次数が d の任意のバシリエフ不変量 v はある線型写像 W を用いて

$$v : \{\text{結び目}\} \xrightarrow{\hat{Z}} \mathcal{A}(S^1) \xrightarrow{\text{射影}} \mathcal{A}(S^1)^{(\leq d)} \xrightarrow{W} \boldsymbol{C}$$

のような合成写像で表され, 逆に, 任意の線型写像 $W : \mathcal{A}(S^1)^{(d)} \to \boldsymbol{C}$ について上の合成写像 v は次数 d のバシリエフ不変量になる.

定理 1 と定理 2 の系として[5] 次がえられる.

定理 3　量子不変量を展開してえられる, 冪級数 $Q^{\mathfrak{g},R}(K)|_{q=e^h}$ の各項の係数はバシリエフ不変量である.

4)　クラスパーは葉広和夫によって導入された.

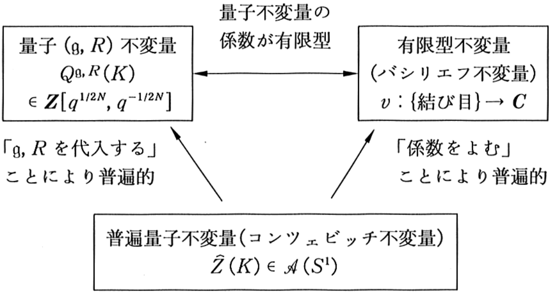


図8　量子不変量をめぐる結び目の不変量

以上でのべた量子不変量をめぐる結び目の不変量についてまとめると図8のようになる．

9・2　量子不変量をめぐる3次元多様体の不変量

3次元多様体の量子不変量

1980年代後半にウィッテンはチャーン-サイモンズ汎関数をラグランジアンとする場の量子論を考え，このときの経路積分で表示された相関関数が3次元多様体の位相不変量を与えることを主張した．これが3次元多様体の量子 G 不変量(ここで G はリー群)の由来である．(第6章参照)

量子 G 不変量は，経路積分による表示が予言する性質を用いて，デーン手術公式などの組合せ的方法により数学的に再定義された．たとえば M が3次元球面 S^3 を結び目 K にそってデーン手術してできる3次元多様体のとき，量子 G 不変量 $\tau_r^G(M) \in \boldsymbol{C}$ は，G のリー環 $\mathfrak{g}$ について，結び目 K の量子 $(\mathfrak{g}, R)$ 不変量を表現 R について(r に応じて定められる範囲で)たしあげることによって表される．

5)　歴史的にはこれらの定理の系としてではなく，これらとは独立にえられていた．(第5章参照)

3次元多様体の摂動的不変量

一般に有限次元の振動積分について被積分項の指数にかかっているパラメータを ∞ にとばしたときの積分値の漸近展開は，被積分項の指数にある関数の臨界点(とその近傍)からの寄与によりきまる．場の量子論における経路積分で表示された相関関数についてこの手法を適用して経路積分を漸近展開すると，その結果として得られる冪級数についてその各係数は有限次元の積分で表された(理論的に)計算可能な量になる．物理的には，その冪級数の係数が(実験上)実測可能な量であり，それらの係数の背後にある基本原理が経路積分による表示である．

数学的に再構成された量子 G 不変量 $\tau_r^G(M)\in \boldsymbol{C}$ についても同様にパラメータ r を ∞ にとばしたときの(ある意味での)極限が存在することが期待される．実際次のようにして「極限」が構成されることが示された(第8章も参照)．簡単のため，M は整ホモロジー球面であることを仮定する．このとき(任意に固定された n に対して十分大きい)任意の奇素数 r について，1の r 乗根を ζ とするとき，

$$\begin{aligned}\tau_r^{SO(3)}(M) &= (\lambda_0+\lambda_1(\zeta-1)+\lambda_2(\zeta-1)^2+\cdots+\lambda_n(\zeta-1)^n \\ &\quad +((\zeta-1)^{n+1}\text{ で割りきれる項}))\end{aligned}$$

となるような(r によらない)有理数の無限列 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ がある[6]．この有理数列を用いて

$$\tau^{SO(3)}(M)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(q-1)^n\in \boldsymbol{Q}[[q-1]]$$

とおき，これを M の**摂動的** $SO(3)$ **不変量**とよぶ．

たとえば(これは整ホモロジー球面ではないが)(5, 1)型レンズ空間 $L(5, 1)$ ([1]を参照)の量子 $SO(3)$ 不変量は

6)　正確には任意の奇素数 r について $\tau_r^{SO(3)}(M)\in \boldsymbol{Z}[\zeta]$ であるという事実(村上斉の結果)と「λ_n の分母には高々 $2n+1$ の素因子しか現れない」という条件のもとで有理数列 $\{\lambda_n\}$ の存在が示される．

$$\tau_r^{SO(3)}(L(5,1)) = \left(\frac{5}{r}\right)\zeta^{-3/5}\frac{\zeta^{1/10}-\zeta^{-1/10}}{\zeta^{1/2}-\zeta^{-1/2}}$$
$$= \left(\frac{5}{r}\right)\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5^2}(\zeta-1)+\frac{11}{5^3}(\zeta-1)^2+\cdots\right)$$

であるので，摂動的 $SO(3)$ 不変量は

$$\tau^{SO(3)}(L(5,1)) = \frac{1}{5}-\frac{3}{5^2}(q-1)+\frac{11}{5^3}(q-1)^2+\cdots$$

のようになる．$\Big($ここで，ルジャンドル記号 $\left(\frac{5}{r}\right)$ は $L(5,1)$ が整ホモロジー球面でないことにともなって現れる補正項なので，ここでは無視していただきたい．$\Big)$

さて，無限個の素数 r についての量子 $SO(3)$ 不変量 $\tau_r^{SO(3)}(M)$ の値の列を漸近展開することによって摂動的 $SO(3)$ 不変量 $\tau^{SO(3)}(M)$ が得られたが，逆に，摂動的 $SO(3)$ 不変量 $\tau^{SO(3)}(M)$ は(すべての素数 r についての)量子 $SO(3)$ 不変量 $\tau_r^{SO(3)}(M)$ の値を決定してしまうのではないかと予想されている．この予想は，「整ホモロジー球面 M について $\tau^{SO(3)}(M)$ は整係数の冪級数であろう」という予想(ローレンスの予想)を仮定すると次のようにして示される．すなわち，次の図式(ここで $F(q)$ は円分多項式)において $\tau^{SO(3)}(M)$ の値をきめると $\tau_r^{SO(3)}(M)$ の値がきまることがわかる．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \tau^{SO(3)}(M) \\
 & & & & \cap \\
 & & & & \boldsymbol{Z}[[q-1]] \\
 & & & & \downarrow \\
\boldsymbol{Z}[\zeta] & \overset{\text{同型}}{\cong} & \boldsymbol{Z}[q]/F(q) & \overset{\text{単射}}{\hookrightarrow} & \boldsymbol{Z}[[q-1]]/F(q) \\
\cup & & & & \\
\tau_r^{SO(3)}(M) & & & &
\end{array}$$

量子不変量の値が摂動的不変量で決定されたとすると，たとえば「量子不変量はどれくらい整ホモロジー球面を区別するか?」といったような問題は，摂動的不変量の研究に帰着されることになる．そこで，3次元多様体の摂動的不変量をよりよく理解するために，摂動的不変量の係数を共通の性質でくくる「有限型不変量」(バシリエフ不変量と類似の性質を期待する)と単一の

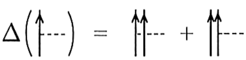
不変量によって摂動的不変量を統一する「普遍摂動的不変量」(コンツェビッチ不変量と類似の性質を期待する)を導入することをめざしてみよう．

普遍摂動的不変量(LMO 不変量)

前節の冒頭で述べたように，3次元多様体の摂動的不変量は物理的には経路積分を漸近展開することにより得られる．この漸近展開の過程に現れるリー環をウェブ図の点線に普遍化させつつ漸近展開を行うことにより，点線のみからなるウェブ図の空間に値をもつ摂動的不変量(普遍摂動的不変量)が(数理物理的に)得られる．

結び目のコンツェビッチ不変量の値の物理的イメージは，ウェブ図の実線が粒子の時間発展を表し，ウェブ図の点線が粒子同士の間の相互作用を伝えるゲージ粒子の軌跡を表す．3次元多様体の普遍摂動的不変量の値は点線のみからなるウェブ図で表されるが，これは真空中をゲージ粒子のみがとびかっている様子を表す．以下では(かんたんのため)結び目 K にそって S^3 をデーン手術してできる3次元多様体 M について，K のコンツェビッチ不変量の値における実線を消去することにより M の普遍摂動的不変量を構成する方法を説明する．

ウェブ図の実線に作用する写像 Δ を(実線にはいる点線が1本のとき)



で定める．一般に Δ は，実線にはいる各点線を2重化された実線のそれぞれにつなぐすべての場合について足し上げたものである．さらに Δ を $n-1$ 回合成することにより

$$\Delta^{(n-1)}: \mathscr{A}(S^1) \longrightarrow \mathscr{A}\left(\coprod^{n} S^1\right) \qquad (4)$$

を定める．ここで $\coprod^{n} S^1$ は n 個の S^1 の排反和である．$\coprod^{n} S^1$ 上のコード図については，各 S^1 ごとに次ページの図9のような対応で S^1 からでている点線の本数に応じて S^1 を点線でおきかえて写像

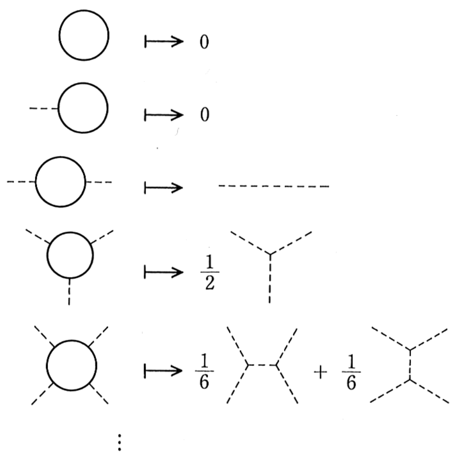


図 9　実線の S^1 を点線におきかえる写像.
一般項については［村杉］を参照されたい.

$$\mathscr{A}\left(\coprod^n S^1\right) \longrightarrow \mathscr{A}(\phi) \tag{5}$$

を定める．さらに(4)と(5)の合成の $1/n!$ 倍を

$$\iota_n : \mathscr{A}(S^1) \longrightarrow \mathscr{A}(\phi)$$

と定める．ここで $\mathscr{A}(\phi)$ は空集合 ϕ 上の（つまり実線のない）ウェブ図（つまり点線のつくる 3 価グラフ）の空間である．写像 ι_n は $\mathscr{A}(S^1)$ のウェブ図における実線 S^1 を点線のみのウェブ図におきかえるが，ウェブ図の組合せ的考察によりそのような写像は実質的に ι_n のようなものしかないことがわかる[7)].

簡単のため，$+1$ 枠をもつ結び目 K にそって S^3 をデーン手術してできる 3 次元多様体を M とする．このとき各自然数 n について，$\Omega_n(M)$ を

$$\Omega_n(M) = \frac{\iota_n \check{Z}(K)}{\iota_n \check{Z}(U_+)} \in \mathscr{A}(\phi)$$

で定める．ここで $\check{Z}(\cdot)$ は $\hat{Z}(\cdot)$ を補正したもの[8)]で，U_+ は $+1$ 枠をもつ自明な結び目である．この $\Omega_n(M)$ の n 次以下の部分はカービー移動 KI,

KII(第6章参照)で不変になり，したがって(カービーの定理により)M の位相不変量になる．さらに $\Omega_n(M)$ の次数が n より小さい部分は $\Omega_{n-1}(M)$ に等しいことがわかるので，3次元多様体 M について，

$$\Omega(M) = \sum_{n=0}^{\infty}(\Omega_n(M) \text{ の次数が } n \text{ の部分}) \in \mathcal{A}(\phi)$$

とおき，これを M の**普遍摂動的不変量(LMO 不変量**[9]**)**とよぶ．

たとえば $+1$ 枠をもつ $(2, n)$ トーラス結び目([河内]を参照)にそって S^3 をデーン手術してできる3次元多様体 M_n について，$\Omega(M_n)$ の値は

$\Omega(M_n)$

$= \exp\Big(\frac{1}{16}(n^2-1)$  $+\frac{1}{96}n(n+1)(n-1)^2$ 

$+(3\text{ 次以上の項})\Big)$

のようになる．結び目のコンツェビッチ不変量 $\hat{Z}(K)$ のときと同様，一般に $\Omega(M)$ の値は連結なウェブ図の1次結合の指数関数で表すことができる．(理由も $\hat{Z}(K)$ のときと同様である．)

摂動的不変量に対する LMO 不変量の普遍性

予想 4　LMO 不変量 Ω はすべての摂動的 G 不変量にたいして普遍的であろう．

ここで「普遍的」というのは定理1における「普遍的」と同じ意味である．すなわち，摂動的不変量 τ^G は重み系 $\hat{W}_{\mathfrak{g}}$ を用いて

$$\tau^G : \{\text{整ホモロジー球面}\} \xrightarrow{\Omega} \mathcal{A}(\phi) \xrightarrow{\hat{W}_{\mathfrak{g}}} \boldsymbol{C}[[h]]$$

7)　$\mathcal{A}(S^1)$ における STU 関係式の ι_n による像が AS, IHX 関係式でかけなくてはならない，ということが写像 ι_n をつくる際のポイントである．

8)　$\hat{Z}(\cdot)$ にある定数 $\nu \in \mathcal{A}(S^1)$ をかけたものが $\check{Z}(\cdot)$ である．

9)　レー-村上順-大槻知忠により定義された．

で表される(であろう)[10]．ここで重み系 $\widehat{W}_{\mathfrak{g}}$ は整ホモロジー球面によらない写像で，すべての摂動的不変量について，整ホモロジー球面の不変量に関する情報はすべて Ω に集約されている(であろう)というのがポイントである．予想4は $G=SO(3)$ のとき大槻知忠により示されており，$G=PSU(n)$ のときレーとロザンスキーによる結果がある．

整ホモロジー球面の有限型不変量

結び目のバシリエフ不変量の定義において結び目同士を関係づける手段は交点の上下のいれかえであった(9•1節参照)．一方，整ホモロジー球面同士を関連づける手段として，絡み目にそったデーン手術がある．そこで，(9•1節の)バシリエフ不変量の定義において，「d 個の交点の集合」を「d 成分の絡み目」に，「交点の上下のいれかえ」を「絡み目にそったデーン手術」におきかえることにより整ホモロジー球面の有限型不変量を以下のように定義してみよう．

まず，整ホモロジー球面の全体がはる $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{M}$ とおく．整ホモロジー球面 M とその代数分離的で単位枠をもつ[11]枠つき絡み目 L について，L のすべての部分絡み目 L' に関する交代和

$$[M, L] = \sum_{L'\subset L} (-1)^{\#L'} M_{L'}$$

を考える．ここで $M_{L'}$ は L' にそって M をデーン手術してできる整ホモロジー球面である．

与えられた非負整数 d について，任意の整ホモロジー球面 M とその任意の代数分離的で単位枠をもつ d 成分の絡み目 L について，$[M, L]$ がはる $\mathcal{M}$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{M}_{(d)}$ とおく．すると

10）実際には $\Omega(M)$ の値はつねに有理数係数になることが知られているので，合成写像の像は $\boldsymbol{C}[[h]]$ ではなく $\boldsymbol{Q}[[h]]$ を考えれば十分である．

11）「L の任意の2つの成分の絡み数が0」のとき L を代数分離的といい，「L の各成分の枠が ±1」のとき L は単位枠をもつという．整ホモロジー球面の絡み目 L がこれらの性質をもつとき，L の任意の部分絡み目 L' について $M_{L'}$ は整ホモロジー球面になる．

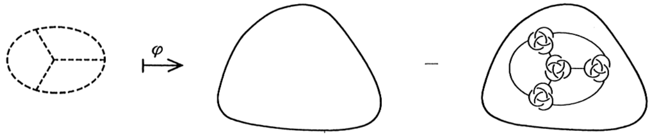


図10 クラスパーを用いた写像 φ の再構成

$$\mathcal{M}_{(3d)} = \mathcal{M}_{(3d-1)} = \mathcal{M}_{(3d-2)}$$

となることがわかる[12]ので，あらためて $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_{(3d)}$ とおく．このとき $\mathcal{M}_{d+1}$ 上で0になるような線型写像 $v: \mathcal{M} \to \boldsymbol{C}$ のことを整ホモロジー球面の d 次の**有限型不変量**[13]とよぶ．たとえば，部分空間の列 $\{\mathcal{M}_d\}$ は整ホモロジー球面がはる空間 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \mathcal{M}_3 \supset \cdots$$

のように段階的に細分化していくが，$\mathcal{M}_{d+1}$ にはいる差(つまり $M - M' \in \mathcal{M}_{d+1}$ となる M と M' の差)を無視して整ホモロジー球面を区別するのが d 次の有限型不変量である．次数0の有限型不変量は自明な不変量で，次数1の有限型不変量は(本質的に)キャッソン不変量になることが知られている．

有限型不変量の研究では $\mathcal{M}$ の細分化の各ステップ $\mathcal{M}_d/\mathcal{M}_{d+1}$ の大きさを具体的に知ることが重要である．ガロファリディス(Garoufalidis)-大槻知忠は全射

$$\varphi: \mathcal{A}(\phi)^{(d)} \longrightarrow \mathcal{M}_d/\mathcal{M}_{d+1}$$

を構成することにより $\mathcal{M}_d/\mathcal{M}_{d+1}$ の各元はウェブ図を用いて表されることを示した．さらに葉広和夫はクラスパーを用いて図10のように写像 φ を再構成した．

有限型不変量にたいするLMO不変量の普遍性

写像 φ はウェブ図に整ホモロジー球面(の同値類)を対応させるが，逆に

12） 本文にある全射 φ を構成するときに，ウェブ図の組合せ的性質を用いて，この等式が示される(ガロファリディス-大槻知忠の結果)．

13） この不変量の有限性(すなわち「各 d について d 次の有限型不変量の全体は有限次元であること」)は大槻知忠により示された．

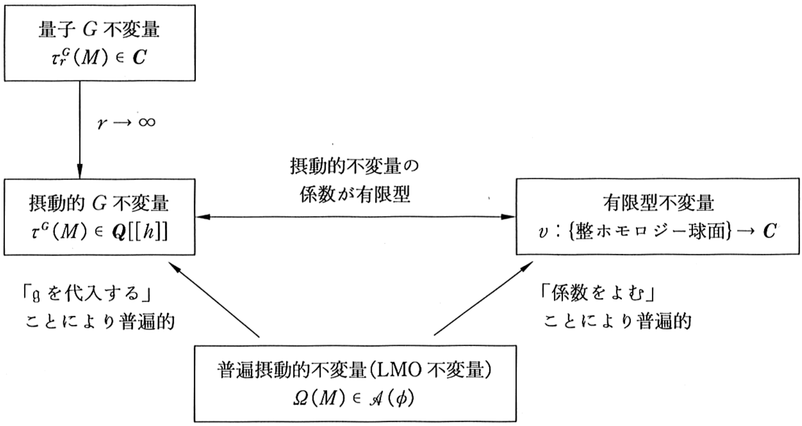


図 11　量子不変量をめぐる 3 次元多様体の不変量

LMO 不変量 Ω は整ホモロジー球面にウェブ図を対応させることに注意しよう．次の定理 5 により Ω の次数 d の部分は d 次の有限型不変量を与えることがわかり，さらに，じつはそれが φ の逆写像を与えることが，φ と Ω の定義にもとづいて具体的に計算することにより示される．よってとくに φ はベクトル空間の同型写像となる．

定理 5 (レー)　LMO 不変量 Ω は整ホモロジー球面の普遍な有限型不変量である．

ここで「普遍な」というのは定理 2 における「普遍な」と同じ意味である．すなわち，次数が d の任意の有限型不変量 v はある線型写像 W を用いて

$$v : \{\text{整ホモロジー球面}\} \xrightarrow{\Omega} \mathscr{A}(\phi) \xrightarrow{\text{射影}} \mathscr{A}(\phi)^{(\leq d)} \xrightarrow{W} \boldsymbol{C}$$

のような合成写像で表され，逆に，任意の線型写像 $W : \mathscr{A}(\phi)^{(\leq d)} \to \boldsymbol{C}$ について上の合成写像 v は次数 d の有限型不変量になる．

以上で述べた量子不変量をめぐる3次元多様体(とくに整ホモロジー球面)の不変量についてまとめると図11のようになる．

9・3 結び目の集合と3次元多様体の集合

量子不変量は結び目(または3次元多様体)をどれくらい区別するのだろうか？ この問題は今までの議論により「コンツェビッチ不変量 $\hat{Z}(K)$ (または LMO 不変量 $\Omega(M)$)はどれくらい結び目(または，簡単のため，整ホモロジー球面)を区別するのだろうか?」という問題に帰着される．さらに $\hat{Z}(K)$ と $\Omega(M)$ は

$$\hat{Z}(K) = \exp(z(K))$$
$$\Omega(M) = \exp(\omega(M))$$

のように $z(K) \in \mathscr{A}(S^1)$ と $\omega(M) \in \mathscr{A}(\phi)$ を用いて表されるので，この問題はさらに $z(K)$ と $\omega(M)$ についての考察に帰着される．

一方，$\hat{Z}$ や Ω は普遍な有限型不変量であったが，有限型不変量が結び目(または整ホモロジー球面)をどれくらい区別するのか考えてみよう．すなわち $d-1$ 次までの任意の有限型不変量の値が等しくなるような結び目同士(または整ホモロジー球面同士)が同値であるとする集合 {結び目} (または集合 {整ホモロジー球面})における同値関係を $\sim_d$ とかく．これは図6，図10の写像の像を0とする同値関係であり，これによりウェブ図を用いてこの同値関係を記述することができるということがわかる(この考察は葉広和夫による)．すなわち {結び目}/$\sim_d$，{整ホモロジー球面}/$\sim_d$ は次数が d より小さい S^1 上(または ϕ 上)の連結なウェブ図が $\boldsymbol{Z}$ 上生成する可換群 $\mathscr{A}(S^1;\boldsymbol{Z})^{(<d)}_{conn}$ (または $\mathscr{A}(\phi;\boldsymbol{Z})^{(<d)}_{conn}$) と同型になることがわかる(次式)．

$$\{\text{結び目}\}/\sim_d \cong \mathscr{A}(S^1;\boldsymbol{Z})^{(<d)}_{conn}$$
$$\{\text{整ホモロジー球面}\}/\sim_d \cong \mathscr{A}(\phi;\boldsymbol{Z})^{(<d)}_{conn}$$

とくにこれらの同型の射影極限をとると

$$\{\text{結び目}\} \longrightarrow \varprojlim \{\text{結び目}\}/\sim_d \cong \hat{\mathscr{A}}(S^1;\boldsymbol{Z})_{conn}$$
$$\{\text{整ホモロジー球面}\}$$

$$\longrightarrow \varinjlim \{\text{整ホモロジー球面}\}/\sim_d \cong \widehat{\mathscr{A}}(S^1\,;\,\boldsymbol{Z})_{conn}$$

が得られる．ここで $\widehat{\mathscr{A}}(\cdot)_{conn}$ は連結なウェブ図の無限和のつくる空間を表す．これらの写像は $z(K)$ と $\omega(M)$ の再構成を与える．

仮にこれらの写像が単射だとしよう．(それは写像 z や ω が結び目や整ホモロジー球面の完全不変量であることを意味するので，仮にそれが示されたとすると非常に強い結果になる．) すると集合 {結び目} や {整ホモロジー球面} は $\widehat{\mathscr{A}}(S^1\,;\,\boldsymbol{Z})_{conn}$ や $\widehat{\mathscr{A}}(\phi\,;\,\boldsymbol{Z})_{conn}$ の部分集合と(z や ω をとおして)同一視できることになる．

集合 {結び目} は結ばっているという現象のつくる集合である．また集合 {整ホモロジー球面} はある種の3次元空間の集合である．これらの集合をウェブ図の空間の部分集合とみなしたときに，これらの集合に期待される構造(つまりウェブ図の空間のもつ組合せ的構造が誘導する構造)は何であろうか？　量子不変量(とその帰結である写像 z と ω)はまさにそのような意味でこれらの集合にある種の構造がはいることを示唆していることになる．これらの集合の構造が(今後)解明されていくことにより，結び目や3次元多様体がさらによりよく理解され，またそれが結び目理論や3次元多様体論の今後の新しい展開につながることを期待したい．

参考文献

結び目の教科書としてはたとえば次のものを参照されたい.

[河内]　河内明夫編,『結び目理論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990

[村杉]　村杉邦男,『結び目理論とその応用』, 日本評論社, 1993

[鈴木]　鈴木晋一,『結び目理論入門』, サイエンス社, 1991

[Rol]　D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, Inc, 1976

多様体の教科書は多数あるが,

[松本]　松本幸夫,『多様体の基礎』, 東京大学出版会, 1988

は比較的読みやすい.

ホモロジー群については位相幾何の多くの教科書に解説があるが,

[田村]　田村一郎,『トポロジー』, 岩波全書, 1972

では初等的にホモロジー群が導入されている.

量子不変量の入門書として[河野]では初等的にいろいろな話題が紹介されている. 参考書として[Kau]では量子不変量に関連する話題が散発的にいろいろかかれている. 量子不変量の視点からかかれている結び目と3次元多様体の教科書として[Lic, PS]がある. また[Oht]では本書での話しの展開にそって量子不変量をめぐる不変量について数学的に詳しい解説がされている.

[河野]　河野俊丈,『組みひもの数理』, 遊星社, 1993

[Kau]　L. H. カウフマン, 鈴木晋一・河内明夫監訳,『結び目の数学と物理』, 培風館, 1995

[Lic]　Lickorish, W. B. R., *An introduction to knot theory*, Graduate Text in Math. **175**, Springer-Verlag, 1997

[PS]　Prasolov, V. V., Sossinsky, A. B., *Knots, links, braids and 3-manifolds : An introduction to the new invariants in low-dimensional topology,* Trans. Math. Monographs **154**, Amer. Math. Soc., 1997

[Oht]　Ohtsuki, T., *Combinatorial quantum method in 3-dimensional*

topology, MSJ Memoirs **3**, Math. Soc. Japan, 1999：その和訳，塩見真枝訳，『量子不変量をめぐる 3 次元位相幾何学の組み合わせ的方法』，重点領域研究『無限可積分系』レクチャーノート **15**

量子不変量の背景となる量子場の理論，すなわち 2 次元共形場理論やチャーン-サイモンズ汎関数をもちいたウィッテンの経路積分公式について，それらから本書で紹介した量子不変量が導きだされる過程が［河野 2］で詳しく丁寧に解説されている．また［江沢］には量子群，KZ 方程式，経路積分などの数理物理のトピックスについて各話完結の入門的解説がある．

［河野 2］ 河野俊丈，『場の理論とトポロジー』，岩波講座 現代数学の展開，1998

［江沢］ 江沢洋編，『数理物理への誘い，最近の動向をめぐって』，遊星社，1994

バシリエフ不変量はもともと結び目全体の空間(イソトピーでわる前の，円周 S^1 の $\boldsymbol{R}^3$ への埋め込み全体の空間)のコホモロジーとして導入された([18])．バシリエフ不変量を定式化するにあたっての本書でのアプローチについては［PS, Oht, 3］を参照されたい．

量子群についての入門的教科書［神保］では量子群やその表現が具体的に構成されている．また量子群の包括的な教科書である［Kas］には準ホップ代数やテンソル圏など量子群に関連する多くのトピックスについても詳しい解説がある．

［神保］ 神保道夫，『量子群とヤン・バクスター方程式』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1990

［Kas］ Kassel, C., *Quantum groups*, Graduate Texts in Math. **155**, Springer-Verlag, 1994

KZ 方程式については［EFK］を参照されたい．さらに KZ 方程式の解のモノドロミーを用いた量子不変量の構成については［河野 2, 河野 3, Kas］で解説されている．またコンツェビッチ不変量について，反復積分による構成は［河野 2, 河野 3, Kas, BS, 3］を，組合せ的構成は

［Oht, BS］を参照されたい.

［河野 3］「青本和彦，喜多通武，『超幾何関数論』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1994」の付録(河野俊丈著)

［EFK］ Etingof, P., Frenkel, I., Kirillov, A., Jr., *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998

［BS］ Bar-Natan, D., Stoimenow, A., *The fundamental theorem of Vassiliev invariants*, Geometry and Physics, lecture notes in pure and applied mathematics **184**, Marcel Dekker, New-York, 1997, 101-134

空間グラフについては，

［小林］ 小林一章，『空間グラフの理論』，培風館，1995

に全般的な解説がある.

その他の文献

[1] Akutsu, Y., Wadati, M., *Knot invariants and the critical statistical systems,* J. Phys. Soc. Jpn **56**(1987)839-842

[2] Atiyah, M. F., *The geomerty and knots and physics*, Cambridge University Press, 1990

[3] Bar-Natan, D., *On the Vassiliev invariants*, Topology **34**(1995) 423-472

[4] Bar-Natan のホームページ,
http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn

[5] Birman, J. S., Lin, X.-S., *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111**(1993)225-270

[6] Broadhurst, D. J., *Conjectured enumeration of Vassiliev invariants*, preprint, q-alg/9709031

[7] 出口哲生，ランダム結び目と高分子の物理学，『数理科学』1997 年 12 月号，12-19

[8] Dijkgraaf, R., Witten, E., *Topological gauge theories and group cohomology*, Commun. Math. Phys. **129**(1990)393-429

[9] Habiro, K., *Claspers and finite type invariants of links*, preprint, 1998

[10] Kirby, R., Melvin, P., *The* 3-*manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for* $sl(2, \boldsymbol{C})$, Invent. Math. **105** (1991), 473-545

[11] Kohno, T., *Topological invariants for* 3-*manifolds using representations of mapping class group* I, Topology **31** (1992), 203-230

[12] Kontsevich, M., *Vassiliev's knot invariants*, Adv. in Sov. Math **16** (**2**) (1993), 137-150

[13] Lickorish, W. B. R., *The skein method for three-manifold invariants*, J. Knot theory Ramifications **2** (1993), 171-194

[14] Murakami, H., Ohtsuki, T., Yamada, S., *HOMFLY polynomial via an invariant of colored planar graphs*, l'Enseignement mathematique **44** (1998) 325-360

[15] Reshetikhin, N., Turaev, V. G., *Invariants of* 3-*manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547-597

[16] Turaev, V. G., *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92** (1988), 527-553

[17] Turaev, V., Viro, O., *State sum invariants of* 3-*manifolds and quantum* $6j$-*symbols*, Topology **31** (1992) 865-902

[18] Vassiliev, V. A., *Cohomology of knot spaces*, in "Theory of singularities and its applications" (V. I. Arnold ed.) Adv. Soviet Math. **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1990) 23-69

[19] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 360-379

索引

さ

執筆者

大山淑之——名古屋工業大学工学部助教授
高田敏恵——九州大学大学院数理学研究科講師
出口哲生——お茶の水女子大学理学部助教授
村上　順——大阪大学大学院理学研究科助教授
村上　斉——早稲田大学理工学部助教授
和久井道久——大阪大学大学院理学研究科助手
大槻知忠（編著）——東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授

量子不変量——3次元トポロジーと数理物理の遭遇

●————1999年8月30日　第1版第1刷発行

編著者——大槻知忠
発行者——大石　進
発行所——株式会社 日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
電話 03-3987-8621（販売）
03-3987-8599（編集）
印刷所——株式会社 精興社
製本所——株式会社 難波製本
検印省略

装幀・本文レイアウト／海保 透
ISBN4-535-78260-1 Printed in Japan